

דף תרגילים מס' 1 באינפי מתקדם—פברואר 2016

1. למצוא דוגמאות כדלקמן:

(א) סידרת קבוצות סגורות לא ריקות  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots$  ב- $\mathbb{R}^n$  כך ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$ .

(ב)  $U$  קבוצה פתוחה חסומה ב- $\mathbb{R}^n$  כך שאין לה תכונת הכיסוי הסופי.

(ג)  $C$  קבוצה קשירה ב- $\mathbb{R}^n$  שאינה פתוחה ואינה סגורה.

(ד) קבוצה קומפקטית ב- $\mathbb{R}^n$  שאינה איחוד סופי של קבוצות קשירות.

2. האם קבוצת הנקודות הרציונליות (כלומר, כל הקואורדינטות רציונליות) ב- $\mathbb{R}^n$  היא קשירה? ואם מגבילים רק לנקודות בתוך עיגול היחידה, האם התשובה משתנה?

3 (א) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה על קטע היחידה הפתוח  $(0,1)$ . להוכיח כי הגרף

$\{(x, y), y = f(x), 0 < x < 1\}$  הוא קבוצה קשירה ב- $\mathbb{R}^2$ .

(ב) האם הטענה ההפוכה נכונה (כלומר, אם הגרף קשיר אזי הפונקציה בהכרח רציפה)?

4. להוכיח כי כל קבוצה קשירה ב- $\mathbb{R}^n$  היא קטע.

5. תהי  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה קומפקטית ו- $\varepsilon > 0$  נתון. להוכיח כי ניתן לכסות את  $C$  על-ידי מספר סופי של כדורים פתוחים רציונליים (כלומר, מרכז רציונלי ורדיוס רציונלי), בעלי רדיוס (רציונלי) קטן מ- $\varepsilon$ .

6. תהי  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה קומפקטית. להוכיח כי

$$C \times C = \{(x, y), x \in C, y \in C\}$$

היא קומפקטית ב- $\mathbb{R}^{2n}$ .

7. לבדוק האם:

(א) החיתוך של שתי קבוצות קשירות הוא קשיר.

(ב) החיתוך של שתי קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי.

8. לבדוק את רציפות הפונקציות הבאות (בכל המישור  $\mathbb{R}^2$ ):

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x^2 - xy - 2y^2} \quad (\text{א})$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0). \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (5)$$

$$s(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^4}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (7)$$