פרופ' מתניה בן-ארצי .

4.5.2008

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם.

זמן:שלוש שעות.

עליכם לצטט בדייקנות כל משפט עליו אתם מסתמכים.

פרק א': לענות על שלוש מארבע השאלות הבאות. כל שאלה=15 נקודות.

1) מצא ווקטור בעל אורך $\sqrt{3}$ בכיוון משיק לעקום החיתוך של הכדור $(z-2)^2+x^2-4x+y^2=4$ והמישור $4x+3y+2z=0$ בנקודה $(0,0,0)$.
..

2) למצוא את כל נקודות האקסטרמום הלוקאליות של הפונקציה
$f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-4y+5$ המוגדרת בכל המישור.
למצוא גם את המינימום והמקסימום הגלובאליים שלה, אם יש כאלה (אם אין-לנמק מדוע).

3) תהי $f:B\to R$ פונקציה דיפרנציאבילית ממשית המוגדרת בכדור היחידה הפתוח $B\subseteq R^n$.
להוכיח כי אם הדיפרנציאל שלה מתאפס בכל נקודה בכדור אזי היא שווה (זהותית) לקבוע (כלומר, היא פונקציה המקבלת ערך יחיד).

4) תהי $f:Q\to R$ פונקציה אינטגרבילית רימן על תיבה Q . תהיינה Q_1,Q_2 שתי תיבות, ללא נקודות פנימיות משותפות, כך ש- $Q_1\cup Q_2=Q$.
נגדיר את הפונקציה $g:Q\to R$ על-ידי:
$g(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x\in \overset{0}{Q_1} \\ 7 & x\in Q_2\end{array}\right\}$. על כל הנקודות הנותרות נגדיר את הפונקציה כאפס.

להוכיח כי $g:Q\to R$ אינטגרבילית רימן.

פרק ב': לענות על שתיים משלוש השאלות הבאות. כל שאלה= 30 נקודות.

1) תהי $F=(f(x,y),g(x,y))$ העתקה גזירה ברציפות על קבוצה פתוחה $U\subseteq R^2$ לתוך R^2. נניח כי $\deg\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=1$ (דרגת המטריצה היעקוביאנית שווה זהותית לאחד) ב- U.
להראות כי סביב כל נקודה $p\in U$ קיים עיגול פתוח $B=B(p,\delta)\subseteq U$ כך שההעתקה F מעתיקה את B לקו גזיר ברציפות.
כלומר: קיימת פונקציה ממשית גזירה ברציפות ϕ, המוגדרת בסביבה של $F(B)$ (תמונת העיגול על-ידי ההעתקה), שהגראדיינט שלה אינו מתאפס בסביבה, וכך שלכל נקודה $(x,y)\in B$ מתקיים $\phi(f(x,y),g(x,y))=0$.

2) תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות ברבע המישור $\{(x,y), \quad x>0, \quad y>0\}$ ונסמן $h(x,y)=\partial f/\partial x \, , k(x,y)=\partial f/\partial y$.

א) להראות כי אם $h+2k\equiv 0$ ברבע המישור ו- $x>0$, $f(x,1)=0$ אזי $f(x,y)=0$ בכל נקודה (x,y) שעבורה $y-2x<1$.

ב) להראות כי אם $(h+k)f\equiv 0$ ברבע המישור ו- $x,y>0$, $f(x,1)=f(1,y)=0$ אזי $f(x,y)=0$ בכל נקודה (x,y) ברבע המישור.

3) תהי f פונקציה ממשית גזירה ברציפות על קבוצה פתוחה $U\subseteq R^n$ כך שהסגור $K=\overline{U}$ קומפקטי . נניח כי בכל נקודה של U קיימים שני אינדקסים $1\le i,j\le n \quad i\ne j,$, כך ש- $x_j\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\ne x_i\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ בנקודה (האינדקסים יכולים להיות שונים בנקודות שונות)..

תהי g פונקציה ממשית רציפה על K המתלכדת עם f על U (כלומר, היא "הרחבה" של f ל- K).

להוכיח כי כל נקודת מקסימום גלובאלי של g נמצאת על השפה ∂U (ולהוכיח כי יש לפחות נקודה אחת כזאת).

בהצלחה!!!

.