

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 9–דצמבר 2015

(1) תהיינה $u(x), v(x)$ פונקציות (מרוכבות) על R^n כך ש- $u(x)$ אינטגרבילית (לבג) ובעלת תומך קומפקטי ואילו $v(x) \in C^\infty(R^n)$. להוכיח כי הקונבולוציה $u * v$ מוגדרת היטב ב- R^n וגזירה ברציפות מכל סדר, כלומר $u * v \in C^\infty(R^n)$.

(2) תהיינה $u(x), v(x)$ פונקציות (מרוכבות) על R^n כך ש- $u(x)$ אינטגרבילית (לבג) ובעלת תומך קומפקטי ומתקיים $\int_{R^n} u(x) dx = 1$ ואילו $v(x) \in L^p(R^n), 1 \leq p < \infty$. נגדיר

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) * v(x), \quad \varepsilon > 0.$$

להוכיח כי:

$$\|v_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p \quad \text{ו-} \quad v_\varepsilon(x) \in L^p(R^n) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon - v\|_p = 0 \quad (\text{ב})$$

הדרכה ל-ב): מספיק להסתכל בפונקציות רציפות עם תומך קומפקטי.

(3) יהי $\Omega \subseteq R^n$ תחום ו- $C_0(\Omega)$ הפונקציות (מרוכבות) רציפות ובעלות תומך קומפקטי בתחום. נגדיר על המרחב הזה שתי טופולוגיות:

(א) τ -- הטופולוגיה הנורמית בנורמת המקסימום.

(ב) σ -- הטופולוגיה המושרית מ- $C(\Omega)$, כלומר, נקבעת על ידי הסמינורמות

$$p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|, \quad K \subset\subset \Omega.$$

האם המרחב $C_0(\Omega)$ שלם באחת מהטופולוגיות האלה?

(4) בשאלה הקודמת ניקח $\Omega = R^n$ ותהי $0 \leq \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ פונקציית ההחלקה הרגילה:

$$\int_{R^n} \varphi(x) dx = 1, \quad \text{נגדיר העתקה ליניארית } T_\varphi : C_0(R^n) \rightarrow C_0(R^n) \text{ על ידי}$$

$$T_\varphi(f) = f * \varphi. \quad \text{להוכיח כי ההעתקה רציפה בשתי הטופולוגיות } \tau, \sigma.$$

(5) תהי $K \subseteq R^n$ קבוצה קומפקטית. להוכיח כי קיימת פונקציה חלקה אישלילית

$$0 \leq f(x) \in C^\infty(R^n)$$

כך ש- K היא קבוצת האפסים שלה, כלומר, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$.

הדרכה. תהי $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ סידרת של כדורים המכילים ב- $R^n \setminus K$ כך שכל קבוצה קומפקטית חותכת מספר

סופי שלהם ואיחודם הוא $R^n \setminus K$. תהי $\{\varphi_j \in C_0^\infty(R^n \setminus K)\}_{j=1}^\infty$ סידרה מתאימה של פונקציות

$$\text{"שולחן"} \quad (\varphi_j(x) = 1, x \in A_j, j = 1, 2, \dots) \quad \text{להסתכל בסכום} \quad \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2 C_j} \varphi_j$$

כאשר

$$C_j = \sum_{|\alpha| \leq j} \max |D^\alpha \varphi_j|$$

(6) תהי $f(x)$ פונקציה ממשית מדידה על הישר. נתון כי הפונקציה מקיימת

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

. להוכיח כי הפונקציה ליניארית: $f(x) = cx$.

הדרכה: לבדוק על הרציונליים. אם הפונקציה רציפה. הטענה נובעת מצפיפות הרציונליים. אחרת, מסתכלים, עבור פונקציית ההחלקה משאלה 4, בקונבולוציה $\exp(if) * \varphi$ שהיא רציפה.