

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 8-דצמבר 2015

הגדרה: במרחב ווקטורי X קומבינציה קמורה היא סכום סופי מהצורה

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad x_j \in X$$

(1) יהי X מרחב נורמי ויהיו X^*, X^{**} המרחבים הדואלי והדואלי השני שלו. על X^* ישנן (בנוסף לטופולוגיה הנורמית) שתי טופולוגיות: החלשה (הנקבעת על ידי X^{**}) והחלשה* (הנקבעת על ידי X). מי משתיהן חזקה יותר?

(2) יהי $B \subseteq R^n$ כדור סגור ויהי $M = C(B)^*$ מרחב המידות על הכדור. יהי B^* כדור היחידה (בנורמה) של M .

(א) להוכיח כי האיברים האקסטרמליים ב- B^* הם בדיוק ה"מידות האטומיות בנקודה"
$$e^{i\theta} \delta_t(f) = f(t), \quad t \in B, \quad f \in C(B), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

(ב) להוכיח כי לכל $\mu \in B^*$ קיימת סידרה של קומבינציות קמורות (סופיות) של מידות אטומיות

כך שלכל $f \in C(B)$ מתקיים $\mu_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(f)$ (לכתוב את התנאי הזה בצורה מפורשת בעזרת ערכי הפונקציה).

(ג) להוכיח כי לכל סידרה $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subseteq B^*$ קיימת תת-סידרה מתכנסת (באיזה טופולוגיה)?

(ד) להסביר את המשמעות של המשפט הבא: הסידרה $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq C(B)$ מתכנסת חלש לפונקציה $f \in C(B)$.

(ה) להוכיח כי בהינתן ההתכנסות החלשה בסעיף הקודם קיימת סידרה של קומבינציות קמורות

$$\left\{ g_k = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^k f_j \right\}_{k=1}^\infty \subseteq C(B) \quad \text{כך ש-} \sup_{x \in B} |f(x) - g_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(ו) במקרה החד-מימדי $B = [0, 1]$ תהי חלוקה של הקטע על ידי $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ ונגדיר $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, 0 \leq j \leq N-1$ ו- $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, 0 \leq j \leq N-1$. ל- Δt נקרא

"פרמטר החלוקה". נגדיר מידה מתאימה לחלוקה זו על ידי $\mu_P = \sum \Delta t_j \delta_{t_j}$. להוכיח כי:

- (i) לכל סידרה של חלוקות יש לסידרת המידות המתאימה תת-סידרה מתכנסת (באיזה טופולוגיה?).
- (ii) אם הפרמטרים של סידרת החלוקות שואפים לאפס אזי סידרת המידות המתאימה מתכנסת לגבול ולחשב גבול זה.

(3) תזכורת (שאלה 3, תרגיל 2): $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. $c_0 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\}$. $I^1 = (c_0)^*$

(א) מהן הנקודות האקסטרמליות של כדור היחידה של I^1 ?

(ב) להוכיח כי כדור היחידה של c_0 אינו קומפקטי בטופולוגיה החלשה. מה זה אומר לגבי האפשרות שהמרחב רפלקסיבי?

מקור: *Rudin, Functional Analysis Ch.3, exercise 12, p.84*.

(4) למצוא את הנקודות האקסטרמליות של כדור היחידה ב- $C[0,1]$, הפונקציות הרציפות על $[0,1]$ בנורמת המקסימום

(התשובה שונה בין המקרים של פונקציות מעל הממשיים ומעל המרוכבים).

מקור: *Rudin, Ch.3, exercise 17, p.84*.

(5) תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית וקמורה. להוכיח שכל נקודה שלה היא קומבינציה קמורה של (לכל היותר) $n + 1$ נקודות אקסטרמליות ב- K .

(מקור: *Rudin, Functional Analysis, Ch.3, exercise 19, p.84*)