

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 7-דצמבר 2015

בשאלות הבאות המרחבים הליניאריים הם מעל המרוכבים, אלא אם כן מצויין אחרת.
 (Ω, Σ, μ) הוא מרחב מידה, כאשר μ מידה (אי-שלילית) σ – סופית.

(1) יהי X מרחב Banach כך ש- $\dim X = \infty$ ויהיו
 $B = \{x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$, $S = \{x \in X, \|x\|_X = 1\}$ ספירת היחידה וכדור היחידה בהתאמה.
להוכיח כי B הוא הסגור החלש של S (כלומר, הקבוצה הסגורה המינימלית בטופולוגיה החלשה המכילה את S).

(2) יהיו X, Y מרחבי Banach ו- $T: X \rightarrow Y$ העתקה ליניארית. נניח כי לכל $f \in Y^*$ קיים קבוע $C_f > 0$ כך ש-

$$|f(Tx)| \leq C_f \|x\|_X, \quad x \in X$$

להוכיח כי $T \in B(X, Y)$, כלומר ההעתקה היא רציפה (חסומה).

(3) יהי $X = C[0,1]$ המרחב של פונקציות רציפות (מרוכבות) בנורמת המקסימום. יהי

$$M = \left\{ f \in X, \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

(א) להוכיח כי M תת-מרחב סגור של X .

(ב) תהי $h(x) = x^2$. לחשב את $dist(h, M)$.

(4) (המשך לשאלה 1 בתרגיל 6) תהי $f: R^n \rightarrow C$ פונקציה סקלרית מדידה ביחס למידת לבג המקיימת את התנאי הבא:

לכל $g \in L^1(R^n)$ המכפלה fg אינטגרבילית לבג על כל כדור סגור סביב אפס והסידרה

$$\left\{ \int_{|x| \leq k} f(x)g(x) dx \right\}_{k=1}^{\infty}$$

חסומה. להוכיח כי $f \in L^\infty(R^n)$.

(5) (א) (הכללה למשפט Mazur): יהי X מרחב נורמי (מספיק להניח קמור מקומית...) ו-

$D, E \subseteq X$ קבוצות לא-ריקות, קמורות וזרות כך ש:

(i) D סגורה ומאוזנת (בפרט מכילה את אפס, אך לא בהכרח סביבה של אפס).

(ii) E קומפקטית.

להוכיח כי קיים פונקצינל ליניארי רציף f על X המפריד בין הקבוצות, כלומר, קיים $\gamma \in R$ כך $0 < \gamma$ ש:

$$\forall x \in D, \forall y \in E, \quad \operatorname{Re} f(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(y)$$

(מקור: (Rudin, Functional Analysis, Th.3.4, p.58)

(ב) יהי $X = L^2[-1,1]$ (לפי מידת לבג) ולכל λ מרוכב נגדיר:

$$E_\lambda = \{f \in C[-1,1], \quad f(0) = \lambda\}$$

(i) להוכיח כי הקבוצה E_λ קמורה וצפופה ב- X , לכל λ .

(ii) להוכיח כי אם $\lambda \neq \mu$ אזי אין פונקציונל ליניארי רציף $\Lambda \in X^*$ כך ש-

$$\sup_{f \in E_\lambda} \{\operatorname{Re} \Lambda f\} < \inf_{f \in E_\mu} \{\operatorname{Re} \Lambda f\}$$

(מקור: *Rudin, Functional Analysis, Ch.3, p.81*)