

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 2 – אוקטובר 2015

בתרגיל זה כל המרחבים הליניאריים הם מעל המרוכבים.

(1) יהי X מרחב טופולוגי קמור מקומית. להוכיח כי הוא מטריזבילי (כלומר, הטופולוגיה שלו נקבעת על ידי מטריקה מתאימה) אם ורק אם הטופולוגיה שלו נוצרת על ידי משפחת סמינורמות שהיא לכל היותר בת מנייה.

(2) א) יהי X מרחב טופולוגי קמור מקומית שהטופולוגיה שלו נוצרת על ידי משפחת סמינורמות (מפרידה) בת מנייה $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. תהי $f : X \times X \rightarrow R$ פונקציה ממשית. להגדיר במונחים של "בסיס סביבות של הראשית" את הרציפות של הפונקציה.

ב) תהי $x, y \in X$, $d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$, המטריקה המתאימה. להוכיח כי $d : X \times X \rightarrow R$ היא רציפה.

ג) תהי $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subseteq (0, \infty)$ סידרה חיובית המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. נגדיר

$e(x, y) = \sup_n [c_n \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}]$, $x, y \in X$. להוכיח כי זוהי מטריקה המגדירה טופולוגיה זהה לטופולוגיה המוגדרת על ידי המטריקה $d(x, y)$ (שהיא שווה לטופולוגיה המוגדרת על ידי המשפחה $\{p_n\}_{n=1}^\infty$).

(3) נגדיר מרחבי סדרות של מספרים מרוכבים על ידי:

$$c_0 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$$

$c = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in C \right\}$ (כלומר, אוסף הסדרות המתכנסות למספר מרוכב כלשהו).

$$l^\infty = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sup_{n \rightarrow \infty} |x_n| < \infty \right\}$$

לכל שלושת המרחבים תוגדר הטופולוגיה על ידי הנורמה $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

להראות כי שלושתם מרחבי בנך (כלומר הנורמה נותנת מטריקה שלמה) וכל אחד הוא תת-מרחב סגור של הבא אחריו.

(4) יהי X מרחב טופולוגי קמור מקומית ויהי $Y \subseteq X$ תת מרחב ליניארי. להוכיח כי הסגור שלו הוא תת מרחב ליניארי.

5) המרחב $C(0,1)$ של פונקציות מרוכבות רציפות על הקטע הפתוח הוא מרחב *Frechet* עם הסמינורמות $p_K(f) = \max\{|f(x)|, x \in K\}$ לכל $K \subset\subset (0,1)$ מוכלת קומפקטית בקטע. (א) האם $C(0,1)$ הוא מרחב נורמי (כלומר, קיימת נורמה שנותנת את הטופולוגיה שלו, ולכן הוא בעצם מרחב *Banach*)? (ב) יהי $C_0(0,1)$ תת-המרחב של הפונקציות שהן רציפות ובעלות תומך קומפקטי בקטע (כלומר, מתאפסות במשלים של תת קבוצה קומפקטית של הקטע). (ג) האם $C_0(0,1)$ הוא תת מרחב סגור של $C(0,1)$? אם לא, מהו הסגור שלו? (ד) להוכיח כי הקבוצה $W \subseteq C_0(0,1)$ המוגדרת על ידי:

$$W = \left\{ f \in C_0(0,1), \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| < 1 \right\}$$

היא קמורה, סופגת ומאוזנת אבל אינה פתוחה ב- $C_0(0,1)$ (בטופולוגיה המושרית מ- $C(0,1)$).

(ה) מה אומרת המסקנה של סעיף ג) לגבי פונקציונל *Minkowski* של W ? (ה) האם תת-המרחב של הפולינומים צפוף ב- $C(0,1)$?

6) יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום (פתוח וקשיר) ו- $1 < k \in \mathbb{N}$ מספר טבעי. המרחב $C^k(\Omega)$ הוא מרחב כל הפונקציות המרוכבות על Ω הרציפות עם כל נגזרותיהן עד סדר k . הטופולוגיה במרחב נתונה על ידי משפחת הסמינורמות $p_{K,\alpha}(f) = \max\{|\partial^\alpha f(x)|, x \in K\}$ כאשר $K \subset\subset \Omega$ קומפקטית ו- α הוא מולטיאינדקס כך ש- $|\alpha| \leq k$.

(א) להראות כי זהו מרחב *Frechet* (מספיק לקחת סידרת מיצוי של קבוצות קומפקטיות).

(תזכורת: מולטיאינדקס הוא $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ כאשר כל α_i הוא מספר טבעי או אפס ו- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$).

$$\partial^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f$$

(ב) להוכיח כי לכל מולטיאינדקס β כך ש- $|\beta| \leq k$ האופרטור $\partial^\beta : C^k(\Omega) \rightarrow C^{k-|\beta|}(\Omega)$ הוא רציף.

(ג) תהי $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ (פונקציה מרוכבת גזירה ברציפות מכל סדר). להוכיח כי אופרטור ההכפלה

$$T_\varphi : C^k(\Omega) \rightarrow C^k(\Omega) \quad \text{הנתון על ידי } T_\varphi(f) = \varphi f \quad \text{הוא רציף לכל } k \in \mathbb{N}.$$