

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 12 – ינואר 2016

בתרגיל זה נסמן ב-

$S(R^n)$ את מרחב *Schwartz*--פונקציות חלקות דועכות מהר ב- R^n .
 טרנספורם פורייה מוגדר על ידי

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad f \in S(R^n)$$

$S'(R^n)$ --מרחב הדיסטריבוטיות המתונות. לכל $u \in S'(R^n)$ נסמן את טרנספורם פורייה שלה ב-
 $\hat{u} \in S'(R^n)$.

(1) תהי $T_H \in S'(R)$ הדיסטריבוטיה המתאימה לפונקציית *Heaviside*:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

להוכיח כי $i\xi \hat{T}_H = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} T_1$

(2) שאלה זאת עוסקת בקשר בין טרנספורם פורייה על הישר וטור פורייה על המעגל.

תהי $f(x) \in L^1(R)$.
 (א) להראות כי הטור

$$g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi j), \quad t \in (0, 2\pi)$$
 מתכנס ב- $L^1(0, 2\pi)$.

(ב) יהי $\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt, \quad n \in Z$ מקדם פורייה של $g(t)$ (בטור פורייה).

להוכיח כי $\hat{g}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(n), \quad n \in Z$

(ג) להוכיח כי אם $f(x) \in S(R)$ אזי $g(t)$ גזירה ברציפות מכל סדר.

(ד) (נוסחת *Poisson*) להוכיח כי אם $f(x) \in S(R)$ אזי

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2\pi m)$$

הדרכה: להשתמש בכך שטור פורייה של פונקציה מחזורית גזירה ברציפות מתכנס אליה במידה שווה.

(3) (א) לחשב את טרנספורם פורייה של הדיסטריבוטיה $\frac{d^2}{dx^2} \delta_0 \in S'(R)$.

(ב) תהי $\chi(x, y)$ הפונקציה הקרקטריסטית של ריבוע היחידה במישור:

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & |x| > 1 \text{ or } |y| > 1 \end{cases}$$

תהי $T_\chi \in S'(R^2)$ הדיסטריבוטיה המתאימה. לחשב את

$$\frac{\partial}{\partial x} T_x, \frac{\partial}{\partial y} T_x \in S'(R^2) / \text{הנגזרות}$$

(4 א) תהי $v \in S'(R)$ המקיימת $\frac{d}{dx} v = 0$. להוכיח כי $v = T_c$ עבור c מרוכב כלשהו, כלומר,

$$v(\varphi) = c \int_R \varphi(x) dx$$

הדרכה: נבחר $\omega \in S(R)$ כך ש- $\int_R \omega(x) dx = 1$. אזי כל $\psi \in S(R)$ מקיים

$$\psi - \int_R \psi(x) dx \cdot \omega = \varphi', \varphi \in S(R)$$

(ב) תהי $u \in S'(R)$ מקיימת את המשוואה $\frac{d^2}{dx^2} u = T_{x^2}$, כאשר

$$T_{x^2}(\varphi) = \int_R x^2 \varphi(x) dx, \varphi \in S(R)$$

למצוא את u .