

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 11 – ינואר 2016

בתרגיל זה נסמן ב-

$S(R^n)$ את מרחב Schwartz -- פונקציות חלקות דועכות מהר ב- R^n .
טרנספורם פורייה מוגדר על ידי

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad f \in S(R^n)$$

(1) תהי $f \in S(R)$ פונקציה חלקה דועכת מהר על הישר. להוכיח את נוסחת Dirichlet :

$$\pi f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_R f(x+t) \frac{\sin(at)}{t} dt$$

הדרכה: להשתמש בנוסחת היפוך הטרנספורם ולהציב את הנוסחה של $\hat{f}(\xi)$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

(2) תהי $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \in S(R)$

(א) להוכיח כי היא מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה

$$-\frac{d^2}{dx^2} \varphi + x^2 \varphi = \varphi$$

(אגף שמאל נקרא במכניקת הקוונטים "האופרטור של אוסצילטור הרמוני").

(ב) לכתוב את המשוואה הדיפרנציאלית שמקיים טרנספורם פורייה $\hat{\varphi}(\xi)$ של $\varphi(x)$.

(ג) להסיק מהמשוואות כי קיים קבוע ממשי c כך ש- $\hat{\varphi}(\xi) = ce^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ ולחשב את c .

(3) (א) לחשב את האינטגרל $\int_R x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

הדרכה: מה הקשר בין האינטגרנד וטרנספורם פורייה של הפונקציה מהשאלה הקודמת?

(ב) לחשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(ax) dx, \quad a > 0$.

(4) הפונקציה $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \in S(R)$ מקיימת את המשוואה $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \varphi(\xi)$ והיא לכן "פונקציה עצמית" של ההעתקה $\mathcal{F}$ (עם ערך עצמי 1).

תהי $\psi(x) \in S(R)$ פונקציה המקיימת

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = \lambda \psi(\xi) \quad \text{עבור מספר מרוכב } \lambda.$$

(א) להוכיח כי הפונקציה $\sigma(x) = (x - \frac{d}{dx})\psi(x) \in S(R)$ מקיימת את המשוואה

$$\mathcal{F}\sigma(\xi) = -i\lambda\sigma(\xi)$$

(ב) להוכיח כי הפונקציה $\theta(x) = 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} \in S(R)$ מקיימת $\mathcal{F}\theta(\xi) = -i\theta(\xi)$.

(ג) להוכיח כי לכל $k = 1, 2, \dots$ טבעי קיים פולינום ממשי $H_k(x)$ מסדר k כך שהפונקציה

$\psi_k(x) = H_k(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \in S(R)$ מקיימת את המשוואה $\mathcal{F}\psi_k(\xi) = (-i)^k \psi_k(\xi)$.
(הפולינומים $H_k(x)$ נקראים פולינומים של Hermite).