

מושגי יסוד באנליזה 1
דף תרגילים מס 10-דצמבר 2015

בתרגיל זה נסמן ב-

$\mathcal{D}(\Omega)$ את מרחב פונקציות הבוחן בתחום $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
 $\mathcal{D}'(\Omega)$ הוא מרחב הדיסטריבוציות (פונקציונלים ליניאריים רציפים על $\mathcal{D}(\Omega)$).

המושג "התכנסות ב- $\mathcal{D}'(\Omega)$ " פירושו: התכנסות לכל $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (כלומר, "נקודתית").

(1) יהי $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ ונגדיר העתקה $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ על ידי:
 $T\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x + ka)$ להוכיח כי ההעתקה מוגדרת היטב ורציפה. (מהי הטופולוגיה על $C^\infty(\mathbb{R}^n)$?)

(2) בהינתן $\psi \in C^\infty(\Omega)$ נתבונן ב- ψu , עבור $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (דיסטריבוציה).
(א) להוכיח את נוסחת לייבניץ: $D_k(\psi u) = (D_k \psi)u + \psi D_k u, k = 1, 2, \dots, n$.
(ב) $D^\alpha(\psi u) = \sum_{\alpha \leq \beta} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \psi \cdot D^{\alpha - \beta} u$
הדרכה ל-ב): להוכיח תחילה לפונקציות חלקות..

(3) תהי $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ונתבונן בהעתקה $T_\varphi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ הנתונה על ידי הקונבולוציה
 $T_\varphi(\psi) = \varphi * \psi$. להוכיח כי זאת העתקה רציפה. (ראו שאלה 4 בתרגיל 9).
תוספת (רשות): הקונבולוציה $\varphi * \psi$ רציפה על המכפלה $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(4) לבדוק האם הפונקציונלים הבאים הם ב- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
(א) $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2} \varphi(x) dx$

(ב) $u_m(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^m} \varphi(x) dx$ כאשר $m \in \mathbb{N}$ טבעי כלשהו.

(ג) $u(\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|x|}{j}} \varphi(\cos\left(\frac{|x|}{j}\right) \cdot x) dx$

(5) נתונה סידרת הפונקציות על הישר:

$$u_k(x) = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}, x \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots$$

(תזכורת: כל פונקציה אינטגרבילית לוקאלית מזוהה עם דיסטריבוציה).

(א) להוכיח כי $u_k \rightarrow 0$ ב- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ב) להוכיח כי לכל $j \in \mathbb{N}$ טבעי מתקיים $\left(\frac{d}{dx}\right)^j u_k \rightarrow 0$ ב- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ג) האם $\frac{d}{dx} u_k \rightarrow 0$ נקודתית על הישר?

6) תהי $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ כך ש- $\int_{\mathbb{R}} u(x) dx = 1$ ונגדיר את סידרת הפונקציות

$$u_k(x) = k^n u(kx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

להוכיח כי $u_k \rightarrow \delta_0$ ב- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (הדיסטריבוציה δ_0 מוגדרת על ידי $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$).