<u>עבודה בקורס תולדות המתמטיקה 80402</u>

שם הסטודנט: אסף סבל.

הנושא: הנחת הסדר הטוב של המספרים הטבעיים בספרו השביעי של אוקלידס.

<u>מבוא</u>

הנושא העיקרי של העבודה הוא עיונים בהנחת הסדר הטוב של המספרים הטבעיים כיסוד קיים ורצוף בהוכחות ואף בהגדרות של ספרו השביעי של אוקלידס. ספר זה הוא אחד משלושה ספרים (השביעי, השמינו והתשיעי מבין 13 ספריו של אוקלידס) העוסקים בנושא תורת המספרים. סקירה מלאה מקיפה ומדוקדקת של כל ההגדרות וההוכחות שבספר העושות שימוש בסדר הטוב של המספרים הטבעיים תצריך הרבה יותר מחמישה עמודים (אפילו יותר מ-100 עמודים), ולכן בחרתי במספר מצומצם למדי של טענות והוכחות, שהקו המנחה הוא סגנון ניסוחן והדגשת המקום בו נעשה שימוש בתכונת הסדר הטוב של המספרים הטבעיים.

הנחת הסדר הטוב של המספרים הטבעיים היא שלכל תת קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים איבר ראשון. להנחה זו יש תוצאות רבות בכל שטחי המתמטיקה ולא רק בתורת המספרים.

האסטרטגיות העיקריות של השימוש בה באות לידי ביטוי בשני אופנים:

א. ע"י כך שמראים שקיים מספר טבעי המקיים את התכונה אותה רוצים להוכיח, ולכן קבוצת כל הטבעיים המקיימת את התכונה הזו אינה ריקה, ולכן יש מספר טבעי מינימלי המקיים אותה.

ב. ע"י כך שמראים על דרך השלילה שטענה, שהיא השלילה של הטענה שרוצים להוכיח, גוררת קיום סדרה אינסופית יורדת ממש של מספרים טבעיים – דבר שאינו אפשרי בקבוצה סדורה היטב.

מספר מאפיינים של הספרים של אוקלידס, מהשביעי ועד התשיעי מייחדים אותם משאר הספרים:

א. ספרים אלה עוסקים בתורת המספרים בלבד בעוד האחרים עוסקים בגיאומטריה. יתרה מכך, חלק מהטענות שבספרים אלה הם שכתוב של טענות מקבילות מגיאומטריה, אך ה<u>גישה</u> של ההוכחה (ולא דווקא תוכנה!) היא מהכיוון של תורת המספרים (ברוח הספר של אוקלידס).

ב. אף על פי שספרים אלה עוסקים בנושא שונה מהאחרים, הם מורכבים מהגדרות ומטענות בלבד. זאת בניגוד לחלק מהספרים האחרים בהם מצוינים גם פוסטולטים ומושגים נפוצים (תרגום חופשי מ-Postulates ומ- Common Notions בהתאמה).

מעניין לראות שדווקא בנושא חדש זה, שנבנה מחדש ובאופן בלתי תלוי בספרים הקודמים, ואפילו מנוסחות ומוכחות בו מחדש טענות אנלוגיות לחלוטין לאלה שכבר נוסחו והוכחו בספרי הגיאומטריה אין ציון מפורש לשום הנחת יסוד. כמובן שאוקלידס אכן משתמש בהנחות יסוד מבלי לציין אותן במפורש.

הוא גם מניח שהקורא יודע לבצע את החישובים המוצגים לעיתים באופן תיאורטי.

אי-ציון הנחות היסוד של תורת המספרים בספריו של אוקלידס מעלה בי שני ספקות:

א. האם ראה את האקסיומות הרלוונטיות לתורת המספרים ככל-כך מובנות מאליהן עד כי מיותר לציין אותן במפורש?
ב. האם ניסוח אקסיומות לתורת המספרים היה הליך מסובך מדי לתקופה שבה נכתב הספר לעומת המוגשים של ימינו?

איני מתיימר להביא ניתוח ממצה ומדוקדק של הנושא, הן מקוצר היריעה והן מהיותי תלמיד ולא חוקר מנוסה, ומטרת העבודה היא בפירוש להציג את הדברים כמה שיותר מנקודת ראותי האישית.

אני אדון בשלוש טענות מהספר תוך סקירה קצרה של הוכחתן ולעיתים אף של ההגדרות של המושגים עליהם מבוססות. הקו המנחה הוא הצבעה על עקרון הסדר הטוב המוצג בהן לעיתים במפורש ולעיתים במשתמע, ואציג את הטענות בשפת ימינו כולל הצבעה על רעיון ההוכחה והמקום בו נעשה שימוש בסדר הטוב של המספרים הטבעיים.

<u>מהי תורת המספרים לפי אוקלידס?</u>

בעוד תורת המספרים של ימינו מתפרשת להרבה מערכות מספרים מעבר למספרים הטבעיים והרציונליים, אוקלידס מבסס את תורתו על שלושה מושגים:

א. היחידה. זהו מעין מושג יסודי המוגדר באופן די פילוסופי בהגדרה הראשונה בספר השביעי. מושג זה, לפי גישתו, אינו מספר, אך המספרים מורכבים ממנו. כלומר היחידה היא מעין חלקיק יסוד ממנו מורכבים המספרים.
ב. המספר. המספר, לפי ההגדרה השניה בספר השביעי הוא ריבוי מורכב של יחידות. מספר לפי הגדרה זו בגישה של ימינו הוא מספר שלם גדול מ-1.
ג. מנה של מספרים. אוקלידס אינו מגדיר מספר רציונלי, אך הוא משתמש במושג חלקים (parts) בהגדרותיו באופן הבא:

בהגדרה השלישית הוא מגדיר בין שני מספרים $a<b$ ש-a הוא חלק מ-b אם a מודד את b, וממשיך בהגדרה הרביעית, אבל מחלק (אולי עדיף מפריד) כשאינו כך. אף על פי שאינו מגדיר את המנות של מספרים כמספרים הוא מציין תכונות שלהן שבלשון ימינו מהוות תכונות של המספרים הרציונליים. לא ארחיב בנושא זה.

אני אעבור כעת לדון בשלוש הטענות.

הטענות הראשונות אליהן אתייחס (אתייחס אליהן כמקשה אחת) הן מוכרות בלשון ימינו בתור "האלגוריתם של אוקלידס". אלה טענות 1-3 בספר השביעי.
על מנת שהתרגום שלי לא יפגע בדיוקן אצטט אותן:

<u>Proposition 1</u>

Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until a unit is left, then the original numbers will be prime to one another.

<u>Proposition 2</u>

Given two numbers not prime to one another, to find the greatest common measure.

<u>Proposition 3</u>

Given three numbers not prime to one another, to find the greatest common measure.

מהניסוח של הטענות עולה כי אוקלידס ראה אלגוריתם זה כאינדיקציה לבדיקת זרות של זוג מספרים נתונים, וכתוצאה מכך הסיק אלגוריתם למציאת המחלק המשותף המקסימלי של זוג מספרים ושל שלשת מספרים.

ההוכחה של הטענה הראשונה דומה מאוד במהותה להוכחה המקובלת בימינו, אך הסימונים שונים, ומקוצר היריעה לא אפרט אותה. בהוכחה משתמש אוקלידס במושג השארית מבלי להגדיר מראש חילוק עם שארית. השארית , כפי שמוצגת בהוכחה, מתקבלת מכך שמחסרים מספר קטן מהגדול מספר רב של פעמים עד שמקבלים הפרש שקטן מהמספר הקטן המקורי והפרש אחרון זה יהיה השארית. קיום שארית זו הוא בהחלט אחת מהנחות היסוד עליהן אוקלידס מסתמך.

ההוכחה של קיום שארית כזו בימינו מתבססת על הסדר הטוב. ניסוחה בלשון ימינו הוא:

אם a ו-b מספרים טבעיים אז קיימים q ו-r טבעיים יחידים המקיימים $a = qb + r$ באשר $0 \le r < b$. המספר r מכונה השארית. רעיון ההוכחה של טענה זו מתבסס על הסדר הטוב: מגדירים $S = \{a - xb \mid a - xb \ge 0 \wedge x \in N\}$ (N – הטבעיים), מראים שאינה ריקה ולכן קיים בה איבר מינימלי ומספר זה מוגדר להיות השארית.

אוקלידס הניח קיום שארית על ידי חיסור מספיק "פעמים". המושג פעמים אצל אוקלידס (בהקשר זה בביטוי continually subtracted) חוזר כתחליף לתכונת הסדר הטוב.

מעניין במיוחד בהוכחות הוא שבהוכחת הטענה הראשונה והשניה נעשה שימוש בעובדה שהמספרים הטבעיים סדורים היטב בשני אופנים:

א. באופן סמוי – בהנחה של קיום השארית.

ב. באופן גלוי – בטענה שהתהליך חייב להיעצר כי לא תיתכן סדרה אינסופית יורדת ממש של מספרים טבעיים.

עם זאת בהוכחת הטענה השלישית לא נעשה שימוש כזה, בעוד שימוש כזה יכול לפשט אותה באופן ניכר ואף להכלילה. הטענה השלישית היא הכללה של הטענה השנייה.
בהוכחת הטענה השלישית אוקלידס אינו משתמש בטענה השנייה ואף חוזר במפורש אך במילים אחרות על ההוכחה שלה. אני אפרט בקצרה:

יהיו a,b,c המספרים הנתונים. יהי d המחלק המשותף המקסימלי של a ושל b.

מכאן יתכנו שני מקרים:

א. d מחלק את c.

ב. d אינו מחלק את c.

כאן באה ההוכחה של כל מקרה בנפרד שהיא חזרה של הוכחת טענה 2.
המעניין הוא שמצד אחד אוקלידס כן רואה את הסדר הטוב של המספרים הטבעיים כאקסיומה שימושית, אך מצד שני הוא אינו מסיק מאקסיומה זו תהליך אינדוקטיבי . נראה כי לו היה רוצה להכליל את טענה 3 למספר גדול יותר של מספרים, הוא היה חייב לציין מהו המספר, וככל שערכו היה גדל כך הייתה מתארכת ההוכחה. מובן שההוכחה של טענה 3 יכולה להתקבל כמסקנה מטענה 2 וניתן להכלילה באינדוקציה לכל מספר סופי של מספרים.

עוד נושא מעניין בספרו של אוקלידס הוא הגדרת הכפל בין מספרים טבעיים. נביא את ההגדרה כלשונה ונשווה אותה להגדרה של ימינו:

Definition 15

A number is said to multiply a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other.

בבית ספר יסודי נהוג ללמד כפל של מספרים תוך שימוש במושג פעמים: 2 כפול 3 פירושו 2 פעמים 3, כלומר להוסיף את 2 לעצמו 3 פעמים. זוהי בדיוק (עד כדי סדר) הדרך שבה אוקלידס בוחר להגדיר כפל בין מספרים בהגדרה שלעיל.
בימינו הגדרת הכפל בין מספרים טבעיים נעשית ברקורסיה באופן הבא:

$a\cdot 1=a$, $a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$. הגדרה זו מבוססת על הסדר הטוב של הטבעיים.

הגדרה זו כמרבית ההגדרות ברקורסיה משרתת את הרעיון האינטואיטיבי של המושג "פעמים", אותו מושג המשמש בהגדרתו של אוקלידס.
למשל $2\cdot 3$ לפי ההגדרה של ימינו יהיה

$$2\cdot 3=2\cdot(2+1)=2\cdot 2+2=2\cdot(1+1)+2=2\cdot 1+2\cdot 1+2=2+2+2$$

(ניסוח זה מרושל כמעה כי הנחתי אסוציאטיביות ולא השתמשתי בסוגריים, אבל הכוונה כאן הייתה להבהיר את הרעיון.)
זוהי למעשה הגדרתו של אוקלידס עד כדי סדר. מההגדרה של אוקלידס בלבד לא ברור אם הכוונה היא להוסיף את 2 לעצמו 3 פעמים או להוסיף את 3 לעצמו פעמיים.

עם זאת אוקלידס מראה שלא משנה הסדר בהגדרה בטענה 16 בה הוא טוען קומוטטיביות כיפלית.
בהוכחה של הטענה, אותה נסקור בקיצור נמרץ, משתמש אוקלידס במושג פעמים.
נציג אותה כלשונה:

<u>Proposition 16</u>

If two numbers by multiplying one another make certain numbers, the numbers so produced will be equal to one another.

בניסוח פשוט של ימינו: לכל שני מספרים טבעיים a,b מתקיים $a \cdot b = b \cdot a$.
הרעיון של ההוכחה של אוקלידס הוא להשתמש בכמה פעמים היחידה מודדת כל ביטוי ולהסיק שוויון ביניהם, שנובע מהטענה הקודמת לה (טענה 15) שאם יחידה מחלקת מספר ומספר אחר מודד עוד מספר אחר אותו מספר פעמים אז היחידה תחלק את המספר השלישי אותו מספר פעמים בו המספר השלישי יחלק את המספר הרביעי.
ההוכחה של ימינו נעשית באינדוקציה.

הטענה האחרונה בה נדון היא טענה 31 שלפיה כל מספר פריק מתחלק ע"י מספר ראשוני. נצטט אותה:

<u>Proposition 31</u>

Any composite number is measured by some prime number.

בטרם נסקור את ההוכחה של הטענה נביא את ההגדרות של המושגים prime ו-composite עליה היא מבוססת:

<u>Definition 11</u>

A **prime** number is that is measured by a unit alone.

<u>Definition 13</u>

A **composite** number is that is measured by some number.

ההוכחה נעשית באופן הבא: *אם A פריק אז לפי ההגדרה הוא מתחלק ע"י איזה מספר B. אם B ראשוני סיימנו. אם הוא אינו ראשוני, כלומר פריק, B מתחלק באיזה מספר C ואז C מחלק את A.* (יש כאן ביטוי לעובדה שהיחס "מחלק את" הוא יחס טרנזיטיבי! אין הוכחה לכך.) *אם C ראשוני סיימנו, אחרת... ואם נמשיך בדרך זו נמצא מספר ראשוני שמחלק את המספר האחרון שנמצא לפניו ואותו מספר יחלק את A.* מעניין לראות כיצד אוקלידס מנמק את קיום הראשוני הנ"ל: *אם ראשוני כזה אינו קיים, סדרה אינסופית של מספרים תחלק את המספר A, כל איבר בה קטן מקודמו, מה שבלתי אפשרי במספרים.*
מעניין במיוחד שכאן אוקלידס מציין את הטענה בדבר אי-קיום של סדרה אינסופית יורדת של מספרים טבעיים במפורש. מכאן שאוקלידס היה מודע לחלוטין להנחה זו, אך לא ניסחה כאקסיומה.

ביבליוגרפיה

העבודה הסתמכה על הפרק השביעי של ספר היסודות של אוקלידס :

The elements / translated with introduction and commentary by Thomas Heath / St. John’s College Press, 1947 volume II.