2.10.2005

ראשיתה של בעית שלושת הגופים אצל ניוטון ולגרנז'

עבודה בקורס "תולדות המתמטיקה". מס' קורס: 80402

מוגשת לפרופ' אהוד הרושובסקי

איתמר קולוין ת.ז. 30007465-5

הקדמה

עבודה זו – מטרתה לבחון את התחלת הטיפול המתמטי-תיאורטי בבעית שלושת הגופים בעזרת שתיים מהיצירות המכוננות שלה, ספר "העקרונות" של ניוטון, ומאמר של לגרנז' על הבעיה, ולהצביע על תרומתן והשינויים שחוללו בנוגע אליה.

ראשית, אעמוד על הגורמים ליצירתה של בעית שלושת הגופים בתיאור קצר של ההיסטוריה של חקירת תנועות הירח. לאחר מכן, אפנה אל תיאור הבעיה לראשונה אצל ניוטון, ואתאר את דרכו בטיפול בבעיה, כפי שהוא תפש אותה, ואת הכלים בהם השתמש. אחרי הסבר קצר על מצב הבעיה אחרי ניוטון, אראה את גישתו של לגרנז' לבעיה. אני אפתח בתיאור תוכן המאמר , ואחר-כך אנתח אותו, ואנסה להראות את מקומו בהיסטוריה של בעית שלושת הגופים. לבסוף, אסכם את העבודה בעריכת השוואה בין גישותיהם של ניוטון ושל לגרנז'.

בעית שלושת הגופים היא בעית מציאת תנועתם של שלושה גופים (מסות) שהכוחות היחידים שפועלים עליהם הם הכוחות הכבידתיים שכל אחד מהם מפעיל על משנהו. כלומר, לפי חוק הכבידה האוניברסלית וחוק התנועה השני של ניוטון, צריך לפתור את שלושת המשוואות הדיפרנציאליות הוקטוריות הבאות, שקובעות את תנועת הגופים ביחס למערכת הצירים במרחב:

$$m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = Gm_i \sum_{i\neq j=1}^{3} \frac{m_j}{{d_{ij}}^2}\hat{d}_{ij} \qquad \text{i=1,2,3}$$

כאשר m_i הוא המסה של כל אחד מהגופים, $\bar{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ הוא הוקטור מהראשית המציין את מיקומו של הגוף ה-i, G הוא קבוע הגרביטציה העולמי, d_{ij} הוא המרחק בין הגוף i לגוף j ו-$\hat{d}_{ij}$ הוא וקטור באורך 1 המכוון מן הגוף I אל הגוף j.

רקע לבעית שלושת הגופים

הייעוד הראשוני, ואף ניתן לומר: המרכזי, של חקירת בעית שלושת הגופים היה ההסבר של תנועות הירח. לפיכך, לטובת העניין ההיסטורי, אתן בקיצור נמרץ את תולדות העיסוק האסטורנומי והמתמטי בתנועת הירח בתרבות המערבית.

הראשונים לערוך תצפיות ולתעד את מיקומו של הירח היו הבבלים. שיטת התיעוד שלהם הייתה מספרית ולא גיאומטרית, ואת חיזוי מיקומו של הירח הם ביססו באופן אמפירי על סדרות המספרים שתיעדו. הבבלים ייחדו מקום ברשומותיהם לליקויי הירח, ואף היו מסוגלים להעריך מתי סביר שיהיה ליקוי.

היוונים ירשו מהבבלים את שיטות המדידה ואת הנתונים האסטרונומיים. עם זאת, הגישה שלהם אל האסטרונומיה הייתה שונה באופי ובתכלית. ראשית, מלכתחילה הם ביססו את האסטרונומיה על הגיאומטריה והשתמשו בציור מסלולים בשביל לחזות את תנועות גרמי השמיים. שנית, האסטרונומים הונחו על ידי הדרישה של אפלטון לפרק את התנועות הללו, מסובכות ככל שיהיו, לתנועות מעגליות קצובות (גודל מהירות קבוע), ועל ידי כך, לחשוף את האידאה שנמצאת מאחורי התופעות.

האסטרונומים היוונים לקחו על עצמם, מצד אחד, להוציא אל הפועל את התכנית האפלטונית, ומצד שני, להתאים את המודל הגיאומטרי אל הנתונים שהפכו להיות יותר ויותר מדויקים. תוצאות המחקר הזה מסוכמות בעיקר אצל היפרכוס מהמאה השנייה לפני הספירה ואצל תלמי ממאה השנייה לספירה. המודל הבסיסי של תנועת הירח הכיל מעגל ראשי שכדור הארץ במרכזו או מחוץ למרכזו (מעגל אקסצנטרי) ומעגל משני שמרכזו על היקף המעגל הראשי ובו נע הירח. המודל הזה אפשר לתלמי לחזות את תנועות הירח, ולכלול בתוכו את שתי הסטיות מתנועה מעגלית קצובה שניצפו באותה התקופה (למעשה זהו פירוק פורייה של התנועה: פירוק לתנועות מחזוריות קצובות).

בין המאות ה-9 וה-14 המודל התלמאי שופר ע״י אסטרונומים מוסלמים ויהודים כך שהייתה התאמה טובה יותר בינו ובין התצפיות. אך לשם כך, הוכנסו מעגלים נוספים למודל שהפכו אותו למסורבל יותר. אבן אל-הייתים, שידוע בעקבות מחקריו בתורת הראייה, ביקר את תלמי על שימוש בתנועת המעגלים למרות שאינם קיימים באמת ועל שילוב גורמים בתיאוריה שסוטים מההנחיות של אפלטון.

באירופה של ימי הביניים והרנסנס ובעיקר בגרמניה התפתחה מסורת מדידות מדויקות שגילתה פער הולך וגובר בין המודל לתצפיות, וכהמשך לקו ההתנגדות לתמונת העולם התלמאית שהיה קיים גם אצל המוסלמים, כמה הוגים הפסיקו לראות את המודל של תלמי כמייצג את התנועות האמיתיות בשמיים.

המאה ה-16 לא הביאה עימה שינוי משמעותי במצב התיאוריה. קופרניקוס השתמש באותם הכלים של תלמי, והוסיף מעגל נוסף על שני המעגלים שכבר היו כדי להסביר את התנועה הבלתי סדירה של הירח. התצפיות של טיכו ברהה שניחנו ברמת דיוק גבוהה יותר מאי פעם, הביאו לגילוי שתי סטיות נוספות בתנועת הירח שלא הופיעו כלל במודל הקיים. עם ההמצאה של הטלסקופ התצפיות השתפרו פלאים, ונתונים חדשים על תנועת הירח הצטברו, אך ללא מענה תיאורטי מתאים.

קפלר ניסה להסביר את הסטיות הללו במונחים הפיזיקלים שלו (הוא טען שהשמש וכוכבי הלכת הם מגנטים וכך הם מושפעים זה מזה), אך לא הצליח לתת תיאוריה כמותית פיזיקלית שאותה ניתן להצליב עם הנתונים. הוא שילב את חוק השטחים שלו (החוק שאומר שהרדיוס המחבר את השמש עם כוכב לכת מכסה שטחים שווים בזמנים קבועים) במודל של תנועת הירח. עם ההמצאה של הטלסקופ התצפיות השתפרו פלאים, ונתונים חדשים על תנועת הירח הצטברו, אך ללא מענה תיאורטי מתאים.

לבסוף, מן הראוי יהיה להזכיר את ירמיה הורוקס (Jeremiah Horrocks 1617-1641) שהסתמך על תוצאות מחקריו של קפלר כדי לבנות מודל חדש לתנועת הירח. הוא הניח שהירח נע באליפסה שמרכזה נע במעגל משני שנע סביב כדור הארץ. באופן הזה הוא קיבל שינוי מחזורי באקסצנטריות של האליפסה, וכן סיבוב של הציר הראשי של האליפסה. שני החידושים הללו עזרו לו לתת קירוב טוב יותר לתנועת הירח ולהכניס לתוך המודל את הסטיות שברהה גילה.

גם אם המודלים האחרונים מהווים הפרה מוחלטת של הצו האפלטוני, הם חלק בלתי נפרד מהמסורת הגיאומטרית-קינמטית של האסטרונומיה היוונית שבה לא ניתן צידוק פיזיקלי למודלים המתמטיים המסובכים שנבנו כדי לחזות את תנועות גרמי השמיים. עם זאת, אצל שני האסטרונומים האחרונים ניכרים החיפוש וההשערה בדבר הגורמים הפיזיקליים שיהיו הסממן המובהק של עבודתו של ניוטון.

ניוטון

התפנית במצב התיאוריה של הירח הגיעה לקראת סוף המאה ה-17 כאשר פורסם ספרו של אייזיק ניוטון, "העקרונות המתמטיים של פילוסופיית הטבע". בספרו ניוטון הציג תיאוריה חדשה של תנועה שהייתה שונה מהותית מאלו שקדמו לה. לפי ניוטון, שינוי בתנועה של חומר נגרם רק ע"י כוחות חיצוניים. הוא קבע חוק מתמטי שמתאר את קצב שינוי התנועה (או הנגזרת בזמן של התנע) בעקבות השפעת כח כלשהו, וניתח את השפעתם של כוחות שנתונים ע"י יחסים מתמטיים. מנקודת מבט יותר מודרנית, הוא מצא את מסלולים ותכונות של תנועות בעזרת חקירה של משוואות דיפרנציאליות שנקבעו על ידי חוקי התנועה, מצד אחד, ועל ידי נוסחת הכח מצד שני.

הספר עצמו בנוי באופי מתמטי המזכיר את אוקלידס. הוא פותח בהגדרות ובחוקי התנועה, ואחריהם ממשיך בשלושה ספרים גדולים. כל ספר מכיל מספר חלקים שבכל אחד מהם מסודרת התיאוריה במשפטים ובעיות. המשפטים הם טענות פיזיקליות שמשתמשות במתמטיקה כדי לתאר במדויק את הכוחות ואת התנועות. אחרי כל משפט או בעיה באה הוכחה (לפעמים קצרה מדי).

בהוכחות ובניסוח המשפטים ניוטון משתמש לרוב בגיאומטריה ובתורת חתכי החרוט שנחשבו במאה ה-17 לתיאוריות המתמטיות הכי מוצקות ובלתי מעורערות שאפשר לבקש. כך רצה גם לשוות לעבודתו שלו אופי דומה. עם זאת, ניכר ב"עקרונות" גם השימוש בחשבון האינפיניטסימלי, שאותו הוא עצמו פיתח, בגבולות, בנגזרות ובאינטגרלים, שבלעדיהם לא היה לו כלי לטפל בבעיות הדיפרנציאליות.

גישתו של ניוטון אל הבעיות האסטרונומיות של חיזוי תנועות גרמי השמיים הייתה הפוכה בכיוונה ושונה במהותה מהגישה המסורתית של ניתוח התנועות מהתצפית. לעומתה הוא התכוון להסיק באופן מתמטי את התנועות בשמיים, מחוק הכבידה האוניברסלית ומחוקי התנועה, וכך להסביר אותן ע"י גורמיהן הפיסיקליים.

בהסקתו את תנועת כוכבי הלכת לניוטון היו שתי מטרות: לתאר את המסלול שלהם ולמצוא את התנועה במסלול מהעקרונות שאותם הניח. לכך מוקדשים החלקים השני והשלישי בספר הראשון. ניוטון מוכיח שם שגוף חסר מימדים נע בהשפעת כח המכוון תמיד אל נקודה אחת אם ורק אם הרדיוס המחבר את הגוף לאותה נקודה מכסה שטחים שווים בזמנים שווים (החוק השני של קפלר). משפט זה מאפשר בהינתן מסלול לקבוע את תנועת הגוף. כמה עמודים אחר כך ניוטון מוכיח שהכח פרופורציוני להפכי של ריבוע המרחק של הגוף מהמרכז, אם ורק אם המסלול שלו הוא חתך קוני, כלומר אליפסה, פרבולה או היפרבולה, כאשר מרכז הכח במוקד החתך הקוני[1]. למסקנה זאת הוא הובל אחרי התכתבות עם רוברט הוק ב-1679. כך הראה ניוטון כיצד מהתיאוריה שלו נגזרים חוקי קפלר שקפלר הסיק אותם מהנתונים האמפיריים של ברהה.

כדאי לציין שניוטון הראה שמסלול אליפטי מתקבל גם כאשר הכח הצנטריפטלי הוא ביחס ישר למרחק בין הגוף למרכז (קשר ליניארי). אך במקרה זה מרכז הכוחות נמצא במרכז האליפסה, ולא במוקדה כפי שהעידו התצפיות.

בחלק התשיעי דן ניוטון בתנועה במסלולים שמסתובבים סביב מרכז הכח, ובחלק האחד-עשר, בתנועה של שניים ויותר גופים המושכים אחד את השני. רובם של שני חלקים אלו מוקדש לפיתוח כלים תיאורטיים כדי לדון בתנועת הירח. בתחילת החלק האחד-עשר ניוטון פותר את בעית שני הגופים, הידועה גם בתור בעית קפלר, שבה צריך לקבוע את מסלוליהם של שני גופים (נקודות מסה) המושכים אחד את השני בכוחות שווים. את זאת הוא עושה ע"י מעבר למערכת מרכז המסה של הגופים, שהיא נחה או נעה במהירות קבועה, לפי עקרונותיו. מכיוון ששני הגופים תמיד נמצאים על אותו הקו עם מרכז המסה שלהם, ניוטון יכול לצמצם את הבעיה אל המקרה מהחלק השלישי עם גוף אחד, כאשר המרחק מהמרכז שווה למרחק בין הגופים, והכח הפועל שווה לאחד הכוחות הפועלים בין הגופים. מכאן הוא מסיק שהגופים נעים בחתכים קוניים שמרכז המסה של הגופים במוקדיהם.

לסיום, אעיר שבכל אחד מצעדיו ניסה ניוטון להגיע אל רמת הכלליות הגבוהה ביותר שהיה יכול להגיע אליה כראוי לעוסק בבניית תיאוריה. עם זאת, כפי שנראה, בבעית שלושת הגופים המצב היה שונה לגמרי.

---

[1]נושא זה היה בויכוח לפני כ-20 שנה. למידע נוסף כדאי לקרוא את Bruce H.Pourciau, “On Newton's Proof That Inverse-Square Orbits Must be Conics,” *Annals of Science* 48 (1991):159-172

טיפולו של ניוטון בבעית שלושת הגופים

אולי מטרתו הגדולה ביותר של ניוטון ב"עקרונות" בכלל ובחלק האחד-עשר בפרט הייתה להראות כיצד כל התנועות בשמיים נגרמות וניתנות להסקה מחוק הגרביטציה האוניברסלית ומחוקי התנועה. בהקשר זה היה הירח הגוף הבעיתי יותר. בהיותו הכי קרוב לכדור הארץ הוא מציג את התנועות הבלתי סדירות באופן מובחן יותר מכוכבי לכת אחרים. ניוטון, כעת, לקח על עצמו להסביר אותן על סמך משיכותיהם של כדור הארץ והשמש בלבד.

אני חושב שסביר מאוד שניוטון חיפש פתרון כללי לבעית שלושת הגופים כפי שמצא עבור שני גופים. ראיה אחת לכך היא טענה 64, שם הוא פותר את בעית הגופים המרובים באינדוקציה עבור כוח משיכה שנמצא ביחס ישר למסה ולמרחק בין הגופים. בטענה זו הוא מראה שכל הגופים ינועו באליפסות ובכל תוספת של גוף האחרים ינועו מהר יותר ומרכז המסה שלהם ינוע באליפסה. עדות נוספת נמצאת בסוף ההקדמה של המחבר למהדורה הראשונה:

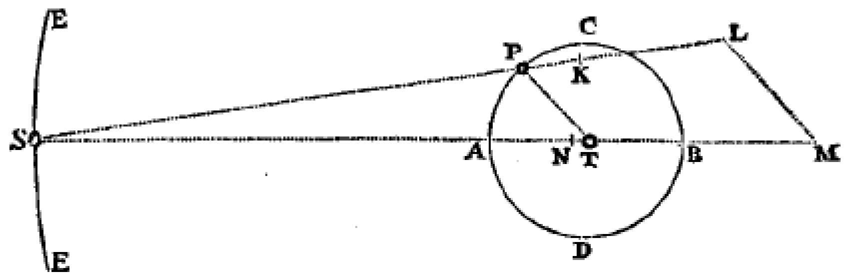
> קיבצתי ... במסקנות של טענה 66 את החקירות **(שהן לקויות)** בתנועות הירח... אני מבקש בכנות שהכל ייקרא במחשבה פתוחה ושהפגמים בנושא כה קשה יוכלו לא להיות מגונים כל-כך כפי שיחקרו, ויתוקנו באדיבות, על ידי המאמצים החדשים של הקוראים שלי. [הדגשה שלי]

הליקויים שעליהם ניוטון מדבר מצויים בחוסר יכולתו ליצור התאמה מלאה בין התיאוריה לתצפיות ולחזות באופן מדויק את הסטיות של הירח, כמו גם לתת פתרון כללי לבעית שלושת הגופים. עדות לקושי הגדול שהיה לניוטון עם תנועת הירח נמצאת בדבריו של האסטרונום ג'ון משין שסיפר כי ניוטון אמר לו ש- "ראשו מעולם לא כאב, אלא במחקריו על הירח". עם זאת, ראוי לציין את דבריו בפתיחת טענה 65 ש-"...לא ייתכן שגופים ינועו בדיוק באליפסות כאשר הם מושכים אחד את האחר לפי החוק שהנחנו כאן [כלומר, חוק הגרביטציה], אלא אם יישמרו על יחס קבוע בין המרחקים בין אחד לאחר." במבט לאחור, דברים אלו רומזים, כביכול, אל הפתרונות הפרטיים של לגרנז' לבעיה, שבהם נדון למטה. אולם, לניוטון לא היה עניין בהם בטיפולו בתנועת הירח.

רוב מאמציו התיאורטיים של ניוטון בבעית שלושת הגופים מרוכזים בטענה 66 ו-22 המסקנות שלה שנמצאות בחלק האחד-עשר. עוד קודם לכן, בטענה 65 נמצא דיון במקרי גבול של בעית הגופים הרבים שמכוון בבירור אל שאלת היציבות של מערכת הירחים של צדק ושל מערכת השמש עצמה. בטענה זו מופיעים שני עניינים שיש להם חשיבות לטענה 66. ראשית, הוא טוען שככל שהמסה של הגוף המרכזי גדולה יותר והמסה של הגופים הסובבים סביבו קטנה יותר, כך המסלולים שלהם יהיו קרובים יותר לאליפסות. שנית, הוא משתמש בתוצאה קודמת מחוקי התנועה: אם מופעל כח חיצוני על מערכת של גופים כך שהתאוצה (הנגזרת של המהירות) של כל גוף היא זהה בגודלה ובכיוונה, אזי התנועות היחסיות שלהם סביב מרכז המסה נשארות זהות, כאילו לא פעל כח כלל.

טענה 66 פותחת בתיאור המערכת: גוף P (הירח) בעל מסה קטנה נע סביב גוף מסיבי T (הארץ) והוא מופרע על ידי גוף חיצוני S (השמש). אף על פי שנאמר כי הגוף S סובב אף הוא סביב T, אין הטענה מטפלת כלל בתנועת S, וברור שהכוונה היא

לאמוד את השפעת S על מסלולו של P. כבר בפתיחה נזכרים שני הפרמטרים שישמשו לתיאור השפעה זו: קצב כיסוי השטחים ע"י הרדיוס PT וצורת המסלול.



התרשים המלווה את טענה 66 ב"עקרונות"

מכאן ניוטון ממשיך אל ניתוח גיאומטרי איכותי של הכוחות הפועלים על P והשפעותיהם. אך לפני כן נעיר שכל הכוחות שמופיעים כאן הם, במינוח הניוטוני, כוחות תאוצתיים, כלומר אלה הן התאוצות שהכוחות הגרביטציוניים גורמים, והן מתקבלות מצירוף החוק השני של ניוטון עם חוק הכבידה.

לאחר בנייה קצרה של הקו SL שמסמל את הכוח שמפעיל הגוף S על P, הוא מציין שלושה כוחות שפועלים על P בסדר לפי מידת הפרעתם לתנועה הקפלרית. הראשון הוא הכוח אשר T מפעיל על P, שבהשפעתו בלבד P ינוע באליפסה, ומכיוון שהוא כח מרכזי, הרדיוס PT יכסה שטחים שווים בזמנים שווים, כפי שהוכח קודם לכן. שני הכוחות האחרים הם רכיבים של הכוח SL : האחד הוא LM המכוון מ-P ל-T, והשני הוא SM שמקביל בכיוונו לכוח ש-S מפעיל על T. הכוח LM מכוון אל T, ולכן בתור כח מרכזי הוא שומר על קצב כיסוי השטחים הקבוע. עם זאת, משום שאינו פרופורציוני להפכי של PT בריבוע, LM ישבש את צורת המסלול האליפטי P. הכוח השני SM גורם להפרעות בשני הפרמטרים, גם בצורת המסלול וגם בקצב כיסוי השטחים, מכיוון שאינו מכוון אל T ואינו נמצא ביחס ישר ל1\^2PT.

לאחר מכן, ניוטון מבודד את הגורם המפריע בכח SM. כזכור, כאשר כל הגופים במערכת נתונה מואצים בתאוצה שווה ובאותו הכיוון, התנועות היחסיות שלהם אינן מופרעות. לכן, אם התאוצה (=הכח התאוצתי) של גוף T בגלל משיכת S היא SN, ההפרעה בתנועה היחסית של P ו-T תיגרם בשל ההפרש בין התאוצות MN, והיא תהיה הכי קטנה כאשר ההפרש הזה יהיה הכי קטן. לבסוף, נידון המקרה שבו S אינו נמצא במישור של המסלול PAB, שזהו, למעשה, המצב בתנועת הירח. כאן אין שום חידוש פרט לכך שההפרעה של MN לא תהיה מוגבלת למישור PAB בלבד, אלא תגרום לתנועה אל מחוץ לאותו מישור.

אחרי שנתן את הניתוח הדינמי שלו לבעיה, ניוטון ממשיך אל מספר מסקנות איכותיות על תנועתו של P. הראשונה שבהן היא מטרתה המוצהרת של הטענה עצמה להראות שתנועת הגוף P היא מופרעת פחות, לפי שני הפרמטרים, תחת החוקים הניוטוניים, מאשר במצב בו הכוחות על T יהיו יסטו משמעותית בגודלם מהתיאוריה.

זה די ברור מההסבר למעלה על הגורם המפריע MN, כי אם SN יהיה גדול מאוד או קטן מאוד מהממוצע של SM, MN יגדל בהתאם.

המסקנות הבאות עוסקות בצורת המסלול ובקצב כיסוי השטחים בנקודות מסוימות. אם מניחים ש-P נע נגד כיוון השעון, מכיוון ש-MN מאיץ את תנועתו בין C ל-A, ומאט אותה בין A ל-D (SM גדול יותר מ-SN לפחות כאשר P בסביבת A), קצב כיסוי השטח ע"י PT יהיה גדול יותר ב-A וב-B מאשר ב-C וב-D (מסקנה 2). כמו כן, P ינוע מהר יותר ב-A וב-B מאשר ב-C וב-D (מסקנה 3). לכן, ומפני ש-MN מנוגד ל-PT ב-A וב-B, העקמומיות[2] של המסלול בנקודות הללו תהיה קטנה יותר מאשר ב-C וב-D, לפי הקשר בין עקמומיות למהירות ולכח בנקודה.

במסקנות שאחר-כך ניוטון ממשיך להסיק תנועות וסטיות שצריכות להופיע בתנועת P כתוצאה מהמשיכה של S, בהן תנועת הציר הראשי של אליפסת הירח, השינויים באקסצנטריות שלה ותנועת קו החיתוך בין מישור תנועת הירח ומישור מסלול הארץ. מסקנות אלו מכוונות להסביר את התנועות הנצפות של הירח, ולאשש את התיאוריה הניוטונית. דווקא צמצום בעית שלושת הגופים אל מערכת שבה המסות והמרחקים ביניהן נמצאים בגבולות מאוד צרים, מאפשר הסקת תכונות גלובליות ומקומיות של התנועה, לפי הכוחות (או המשוואות) השולטים בה. הגיוון הרב בתכונות הללו בבעיה המצומצמת כאן מעיד על אופיה הכאוטי של הבעיה הכללית, ומראה את חשיבותו של ניתוח איכותי על פני ניתוח כמותי של התנועה.

הגוף של טענה 66 אינו מכיל שימוש בכלים מתמטיים מסובכים, ואפילו אין בו שימוש באנליזה. אולם, ניתוח הכוחות מאפשר שימוש בטענות קודמות, שיש בהן יישום של כלים מתמטיים. כדי להסיק תנועות מסוימות של הגוף P. כך, למשל, הוא המצב במסקנה 7 שבה הצירוף של הרכיב LM אל הכוח שמפעיל P על T נותן כוח שלפי טענה 45 מהחלק התשיעי, גורם לציר האליפסה להסתובב; ואמנם, בחלק התשיעי קיים שימוש ברוב הכלים המתמטים המופיעים ב"עקרונות". בטענה 44 ניוטון מוצא את הכוח המרכזי שצריך להוסיף לכוח הקיים כדי לגרום למסלול להסתובב, באמצעות גבול גיאומטרי דומה לזה שנמצא בפתרון בעית הגוף האחד. כמו כן, בטענה 45 הוא משתמש בפיתוח בינומי ובגבול אלגברי בשביל למצוא את קצב הסיבוב, בהינתן הכוח, במסלולים שהם קרובים למעגלים (אקסצנטריות קטנה).

אם כן, אצל ניוטון הופיעה לראשונה בעית שלושת הגופים גם אם בצורה מוגבלת. גישתו של ניוטון אל הבעיה היא טיפוסית לטיפולו בתנועות אחרות ב"עקרונות", אבל ההיקף שלה והמאמץ שהוא השקיע בה חורגים בהרבה מאלה שהקדיש לבעיות אחרות. למרות זאת, מאמציו לא נשאו את הפרי לו ייחל, והמשך העבודה נותר למוחות צעירים יותר ולכלים חדשים שעדיין לא נעשה בהם שימוש.

---

[2] העקמומיות היא ההפכי של הרדיוס במעגל שיש לו אותן נגזרות מסדרים ראשון ושני כמו של העקום בנקודה.

<u>בעית שלושת הגופים והתיאוריה של הירח אחרי ניוטון</u>

במשך המאה ה-18 הדיון על תנועת הירח המשיך ביתר שאת. דיון זה הונע ע"י הצורך של הניווט הימי בחיזוי מדויק של תנועות הירח, אשר שימש כמקור אמין יותר לידיעת הזמן מהשעונים המכניים שנטו להתקלקל. כמו כן, על רקע התיאוריה הניוטונית, שבהדרגה הפכה להיות יותר ויותר מקובלת, הורגשה הנחיצות של אישוש חוק הגרביטציה ובדיקת יכולתו להסביר את תנועות גרמי השמיים ואת יציבות מערכת השמש. ההתפתחות של האנליזה באותו הזמן הביאה להחלפת השיטות הגיאומטריות של ניוטון במשוואות דיפרנציאליות ובאלגברה.

אחד מהחיזויים החלשים ב"עקרונות" של ניוטון הוא דווקא של קצב הסיבוב של הציר הראשי של מסלול הירח, שנתן ערך שהוא בערך חצי מהערך מהתצפית (ניוטון מודה בכך במפורש בסוף טענה 45). בשביל להפעיל את טענה 45 ניוטון העריך שבממוצע על מחזור אחד השפעת הרכיב NM מתאפסת, והרכיב LM אינו תלוי בזווית STP. הקירובים הללו שניוטון לא היה מסוגל להעריך את השגיאה כתוצאה מהן, הביאו לתוצאה האמורה.

בעית הסבר התנועה של הציר נשארה בלתי פתורה עד אמצע המאה ה-18. ב-1747 אלקסיס קלירו (Clairaut) פרסם את הפתרון המקורב הראשון באמצעות טורים אינסופיים לתנועת הירח, אך מכיוון שלא הצליח לתת חיזוי לתנועת הציר המתאימה לתצפית, הוא תהה האם צריך לתקן את חוק הכבידה. לבסוף, ב-1749 הוא הגיע לתוצאות המקוות על ידי קירוב מסדר יותר גבוה.

בהשראת עבודתו של קלירו, לאונהרד אוילר פרסם ב-1753 את תיאורית תנועת הירח שלו (Theoria motus lunae) שבה הוא השתמש בשיטת וריאצית הפרמטרים. תחת השפעה ברורה של הטיפול בבעיה אצל ניוטון אוילר כתב בשנות ה-60 של המאה ה-18 שלוש עבודות שמטרתן הייתה לחקור ולתת פתרון סגור לבעית התנועה של גוף תחת השפעתם של שני מוקדי כוח נייחים. הוא הצליח לתת פתרון כללי לבעיה זו בצורה של אינטגרלים אליפטיים. ב-1762 אוילר הגיש מאמר שדן לראשונה בבעית שלושת הגופים המוגבלת, שבה הוא הניח שמסת אחד הגופים מספיק קטנה כך שלמעשה, היא אינה מפעילה כוח על שני הגופים האחרים. במאמר זה הוא מצא שקיים פתרון פרטי לבעית שלושת הגופים שבו שלושת הגופים נמצאים על אותו קו כל העת, והקו מסתובב (פתרון קו-ליניארי). בעקבות מחקריו אלה אוילר הגיש את תיאורית הירח השנייה שלו לאקדמיה בפטרסבורג ב-1768 וב-1772 הגיש עבודה נוספת בנושא לאקדמיה הצרפתית, וזכה יחד עם לגרנז' בפרס השנתי של האקדמיה.

לגרנז'

ז'וזף-לואי לגרנז' החל במחקריו בתנועות הגופים השמימיים בעקבות העבודות של אוילר על התנועה של גוף תחת השפעת שני מוקדי כוח נייחים. בסוף שנות ה-60 הוא פרסם שני מאמרים על אותה הבעיה. בראשון הוא השיג את תוצאות דומות לאילו של אוילר, ובשני הוא בחן את משוואות התנועה תחת משיכה שאינה פרופורציונלית להפכי של המרחק בריבוע. בסוף המאמר הוא ניסה להשתמש במסקנותיו כדי להסיק את תנועת הירח, כאשר הוא מוסיף לתאוצת הירח הנגרמת בגלל השמש, תאוצה שווה והפוכה בכיוונה לזאת של כדור הארץ שנגרמת כתוצאה ממשיכת השמש. כלומר, לגרנז'

חזר על ניתוח הכוחות שניוטון עשה ב"עקרונות", אך הפעם הוא קיווה להשיג תוצאות טובות יותר הודות לכלים האנליטיים שבידיו. עם זאת, התברר כי הבעיה הזו היא בלתי פתירה.

כשהוא מונע על ידי מחקריו הקודמים, לגרנז' החליט לנתח את בעיית שלושת הגופים בכל כלליותה. מאמציו בחקר הבעיה התבטאו ב"מאמר על בעיית שלושת הגופים" (Essai sur le probléme des trois corps), עבודה שהיקפה הוא כמאה עמודים. לגרנז' הגיש אותה לאקדמיה הצרפתית למדעים ב-1772, וקיבל עליה את הפרס השנתי של האקדמיה.

תוכן המאמר

המאמר פותח בהקדמה, בה לגרנז' מציג את שיטתו לפתרון בעית שלושת הגופים בכלליות, ומסביר בקצרה את תוכן ארבעת פרקי המאמר. שני הפרקים הראשונים מוקדשים לטיפול התיאורטי-מתמטי בבעיה: הראשון עוסק בגזירת המשוואות הכלליות שמהוות את השיטה, והשני מראה את קיומם של שני פתרונות פרטיים לבעיה על סמך המשוואות הללו. בשני הפרקים האחרים מיושמות משוואות החלק הראשון לתנועות המערכת שמש-ירח-ארץ, ומוסקות הסטיות בתנועת הירח. בהתאם להיקפה ולמטרותיה של העבודה הנוכחית אדון רק בשני הפרקים הראשונים.

הסברים מודרניים על בעית שלושת הגופים בדרך כלל פותחים במערכת משוואות התנועה של הגופים, שהן תשע משוואות דיפרנציאליות מסדר שני, כל אחת עבור קורדינטה אחרת של אחד הגופים במרחב התלת-מימדי, כך שסדר המערכת הוא 18. אז מראים את אינטגרל מרכז המסה שמוריד את סדר המערכת ל-12. בפרק הראשון במאמר לגרנז' מתחיל כבר עם המערכת המצומצמת שבה שש משוואות מסדר שני עבור הקורדינטות במערכת הנעה עם מרכז המסה של שני וקטורים המכוונים מאחד הגופים (A) לשני האחרים (B ו-C).

באמצעות כמה פעולות אלגבריות על המשוואות לגרנז' נותן שלושה אינטגרלים של המערכת שמבטאים את שימור התנע הזוויתי שלה לאורך כל אחד מהצירים, ואינטגרל נוסף שמבטא את שימור האנרגיה במערכת. כפי שלגרנז' בעצמו מציין, אינטגרלים אלה הם היחידים שנמצאו עד זמנו.

כעת לגרנז' פונה אל מטרתו העיקרית בפרק הראשון: גזירת המשוואות הקובעות את פונקציות המרחקים r,r',r" בין הגופים לפי הזמן, והסבר כיצד ניתן רק מידיעת פונקציות המרחקים להסיק את תנועת הגופים במלואה, כלומר, את פונקציות הקורדינטות לפי הזמן. את המשוואות שקובעות את פונקציות המרחקים בריבוע הוא מפתח בשלושה שלבים, עד שלבסוף מתקבלות שלוש משוואות דיפרנציאליות (K) מסדר ארבע שמכילות רק את פונקציות המרחקים (לגרנז' מציג אותן כמשוואות שבהן נמצאת הנגזרת השנייה של פונקציית המרחק ועוד אינטגרל בתוך אינטגרל – לאינטגרלים אלו הוא נותן את הסימונים Q,Q',Q")[3].

---

[3] עמ' 242

כשהוא משתמש בשש משוואות בין הקורדינטות, נגזרותיהן ופונקציות הניתנות לכתיבה רק בעזרת המרחקים, לגרנז' מקבל משוואה אחת (N) מהסדר השלישי בין פונקציות המרחקים ונגזרותיהן. אינטגרל נוסף של המערכת (K) המתבטא במשוואה (P), הוא מסיק מהאינטגרלים של שימור התנע הזוויתי. בעזרת שתי משוואות אלה ועוד אחת הנובעת מאינטגרל שימור האנרגיה, לגרנז' מסביר[4] כיצד ניתן לבטא את האינטגרלים Q, Q', Q" בעזרת המרחקים, הנגזרות שלהם ואינטגרל על פונקציה ב- r, r',r". את הערכים האלו ניתן אחר כך להציב במערכת (K) , ואז לסלק את הערך של האינטגרל האחרון שהוזכר, ע"י חילוצו מאחת המשוואות וגזירתה. כך שבסופו של דבר, מתקבלת מערכת של שלוש משוואות, שתיים מהסדר השני ואחת מהסדר השלישי ב- r,r',r". בדרך זו לגרנז' מציע להוריד את סדר המערכת מ-12 ל-7 על-ידי אינטגרל שימור האנרגיה, שלושת האינטגרלים של שימור התנע הזוויתי ואינטגרל נוסף שמתבטא במשוואה (N).

לאחר מכן, לגרנז' פונה אל משימת ביטוי הקורדינטות בעזרת פונקציות המרחקים בין הגופים בלבד. לשם כך הוא משתמש בשלוש משוואות עבור כל שלוש קורדינטות: משוואת הגדרת המרחק (הנורמה) ושתי משוואות הנובעות ממשוואות שימור התנע הזוויתי שבאחת מהן הוא מציב ביטוי שהתקבל מחקירת שש המשוואות שמהן התקבלה המשוואה (N). בתחילה, לגרנז' מניח שוקטור התנע הזוויתי מכוון לאורך ציר ה-z, ומראה בקלות כיצד קורדינטת ה-z וזווית האזימוט בקורדינטות הגליליות ניתנות לביטוי כפונקציה של המרחקים בין הגופים. בעזרת טרנספורמציה פשוטה הוא מעביר את הגליליות לקורדינטות הקרטזיות.

בסעיפים שאחר כך לגרנז' מראה כיצד למצוא העתקה ליניארית שומרת על הנורמה (אורתוגונלית) מכל מערכת צירים שהיא אל מערכת צירים שבה וקטור התנע הזוויתי מקביל לציר ה-z, ובה ניתן להשיג את התוצאות הקודמות באותה הקלות. לבסוף, נגדיר את מישור המסלול הרגעי של הגוף B להיות המישור הנפרש ע"י הוקטור המחבר את הגופים A ו-B וע"י וקטור המהירות של B, ובאותו האופן נגדיר מישור מסלול רגעי עבור C; לגרנז' מראה כיצד ניתן לבטא את הזווית בין שני המישורים והזוויות בין קו החיתוך לבין הרדיוסים המחברים את A ו-B ואת A ו-C. אציין שיעקובי במאמר מ-1843 הראה כיצד ניתן להשתמש בדרך ההצגה דומה כדי להוריד את מערכת משוואות התנועה אל סדר 6 [5].

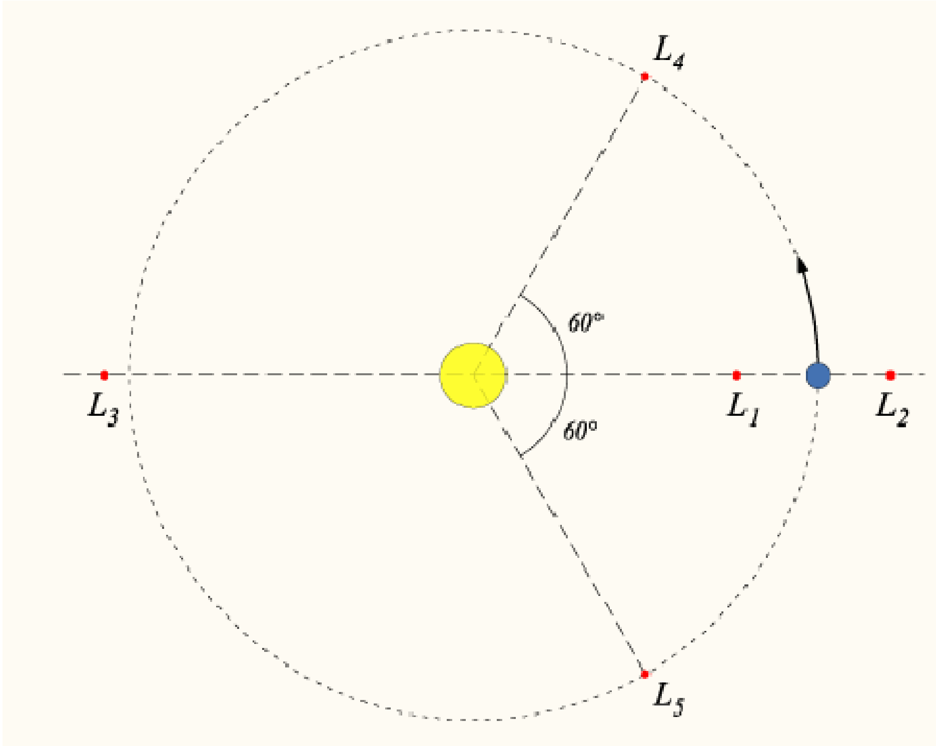
בפרק השני לגרנז' בודק שתי הגבלות על תנועת הגופים: האחת שהמרחקים ביניהם יהיו קבועים והשנייה שהמרחקים ישמרו על יחסים קבועים ביניהם. בעזרת המשוואות של הפרק הראשון הוא מראה שבשתי ההגבלות הבעיה פתירה באופן מדויק. באופן כללי, הוא מגלה שקיימים שני פתרונות פרטיים תחת שתי ההגבלות האלה. הראשון כאשר המרחקים שווים ביניהם כל הזמן (קבועים או משתנים), ואז הגופים יוצרים משולש שווה צלעות; והשני כאשר כל הגופים נמצאים כל הזמן על קו אחד. בפתרון השני היחסים בין המרחקים נקבעים ע"י משוואה ממעלה חמישית, כלומר, בהינתן המרחק בין גוף אחד לשני, השלישי יכול להימצא רק במספר מקומות מצומצם

---

[4] עמ' 250

[5] C. G. J. Jacobi: [Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps]

(ליתר הדיוק, שלושה) על אותו הקו. בשני הפתרונות הגופים נעים בחתכים קוניים ביחס למוקד, סביב מרכז המסה.



בתרשים ניתן לראות את חמש הנקודות שבהן יכול להימצא הגוף השלישי ביחס לגופים האחרים בשביל שיתקיימו הפתרונות הפרטיים. נקודות אלו נקראות "נקודות לגרנז' ". לגרנז' הסביר בסוף הפרק השני שמסלולים של שלושת הגופים יהיו יציבים גם אם המערך שלהם יהיה קרוב לאחד מהמערכים הללו.

חשיבות המאמר ומשמעותו בהקשר ההיסטורי

מאמרו של לגרנז' היווה ציון דרך חשוב בטיפול בבעית שלושת הגופים. אין זאת בלבד מפני שהוא הציג שיטה חדשה וגישה שונה בטיבה ובהיקפה, מאלו שהיו נקוטות עד אז, אלא גם משום שהוא הראה את כוחן הרב של האנליזה והאלגברה בטיפול בבעיות דינמיות.

כפי שראינו קודם, החקירות התיאורטיות של המתמטיקאים בבעית שלושת הגופים הונחו בעיקר על-ידי הטיפול של ניוטון בתנועת הירח, ובפרט הדבר אמור על לגרנז'. לכן הוא בייחוד היה מודע לחידוש שמכילה עבודתו, ומודעות זו באה לידי ביטוי מספר פעמים במאמר. כך כבר באפיגרף שפותח אותו מלוקרציוס (משירו De rerum natura) : "Juvat integros accedere fontes" כלומר "אני עולץ לבוא אל מעיינות שלמים [או, שיד לא נגעה בהם]". אחר כך, בתחילת ההקדמה לגרנז' מציין ששיטתו לפתרון שונה מכל הקודמות. כמו כן, מאוחר יותר הוא מעיר:

...מקרב כל המישורים [או מערכות הצירים] שניתן להעביר דרך הגוף A, קיים אחד שצריך להעדיף אותו, מפני שהתנועות של הגופים B ו-C סביב A ביחס לאותו מישור הן פשוטות ככל האפשר.

ההערה הזאת, אשר נראית לי בעלת חשיבות-מה בבעית שלושת הגופים, עדיין לא נאמרה, מפני שאף אדם, עד כמה שאני יודע, לא עיין עד עתה בבעיה זו באופן כה כללי כפי שאנו באנו לעשות.[6]

כאן נראה מאפיין בולט של המאמר, והוא הכלליות שבה מצטיין הטיפול של לגרנז'. כלליות זו ניכרת מלכתחילה בכך שלגרנז' מסתמך רק על משוואות התנועה בלי להניח הגבלות על המסות של הגופים או על המרחקים ביניהם. להיפך, הוא מדגיש מספר פעמים את הסימטריה בין הגופים במשוואות שהוא גוזר. לכן, תוצאות מחקרו והשיטה שלו, לקבוע קודם את פונקציות המרחקים ומהן להסיק את תנועות הגופים, הן בנות-תוקף עבור כל מערכת דינמית חופשית של שלושה גופים. הכלליות בפרק הראשון מתבטאת גם בכך שלגרנז' שוקל באיזו מערכת צירים הכי כדאי מהבחינה החישובית לתאר את תנועות הגופים, וגם עושה שימוש בקורדינטות נוספות של מישורי התנועה של שניים מהגופים.

הגישה הכללית אל הבעיה הניעה את לגרנז' גם לבחון פתרונות פרטיים שאותם הוא מצא מתוך "סקרנות טהורה". כמו כן, הוא קיווה, כפי שהוא אומר בתחילת הפרק השני, שפתרונות אלו ישפכו אור על הבעיה הכללית, אך התוודה שכנראה אין להם מקום במערכת השמש. אף על פי כן, ב-1906 התגלה האסטרואיד הטרויאני שיוצר בקירוב יחד עם צדק והשמש משולש שווה צלעות.

חידוש נוסף במאמר הוא כמובן השיטה של לגרנז' לפתרון בעית שלושת הגופים. לגרנז' מציין לפחות יתרון אחד שלה על מערכת המשוואות הראשונית, שהוא שאין במשוואות הדיפרנציאליות של המרחקים שורשים כלל. כמו כן, שיטה זו מאירה פן נוסף ומעניין בבעיה, שכל התנועות היחסיות והמסלולים של הגופים נקבעים על ידי פונקציות המרחקים ביניהם בלבד. נוסף על כך, לגרנז' מראה לראשונה כי ניתן להוריד את סדר מערכת משוואות התנועה לסדר 7 בלבד.

יש לשים לב שלאורך המאמר כולו לגרנז' מסתמך כמעט רק על האלגברה ועל האנליזה (הכוונה היא לפעולות גזירה ואינטגרציה) בשביל להסיק את תוצאותיו. כמו כן, רוב מאמציו בפרק הראשון מיועדים להפוך את הבעיה לנוחה יותר לפתרון מהבחינה האלגברית. יתר על זאת, אף על פי שבכמה מקומות לגרנז' מתייחס לאובייקטים גיאומטריים כמו מישורים והזוויות ביניהם או משולשים וקווים בפרק השני, לא מופיע ולו תרשים אחד המתאר אותם, גם אם התיאור המילולי הוא יחסית מסובך. זאת בהמשך לנטייה הולכת ומתחזקת במאה ה-18 להסתמך על האלגברה בלבד שנחשבה הכלי האמין והודאי ביותר. מבחינה זו לגרנז' הוא מעין דמות שיא בגישה הזאת, כפי שהיא מתבטאת בניסיונו להעמיד את האנליזה על האלגברה[7].

---

[6] עמ' 259

[7] תיאור של נסיונו זה ניתן למצוא בספר

The higher calculus : a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass / Umberto Bottazzini ; translated by Warren van Egmond.

סיכום

בעמודים הקודמים סקרתי את ראשיתה של בעית שלושת הגופים אצל ניוטון ולגרנז', וניסיתי לעמוד על גישותיהם השונות לבעיה ועל תרומתם לניסוחה ולפתרונה. כעת, אתן את הנקודות העיקריות שבהן הם נבדלים, ובכך אנסה להאיר את תפקידם ההיסטורי ואת השינויים שעברו על האנליזה במאה ה-18.

השוני הראשון שעולה בין ניוטון ללגרנז' הוא בהיקף שבו כל אחד שוקל את הבעיה. כפי שראינו, עבודתו של ניוטון הייתה מכוונת להסקת תנועות הירח מהתיאוריה הפיסיקלית, ולכן, לא רק שהניח הגבלות על המסות ועל המרחקים בין הגופים, אלא גם עסק, למעשה, רק בתנועתו של גוף אחד. לעומת זאת, לגרנז', שראה שהבעיה לפי תוכניתו של ניוטון להסקת התנועות אינה פתירה, החליט לטפל בבעיה בכל כלליותה, והדגיש דווקא את הסימטריה בין הגופים ותנועותיהם. אמנם את התוצאות הכלליות הוא יישם בתיאורית תנועת הירח, אך מטרתו הייתה, קודם כל, לטפל במערכת משוואות התנועה ולמצוא את הדרך הנוחה ביותר להשתמש בהן.

מכאן הבדל מובהק נוסף בין שתי העבודות - הגישה אל הבעיה. אצל ניוטון נקודת המבט הייתה דינמית-סיבתית, כלומר, לכל תנועה מסוימת הוא חיפש את הכוח שגורם לה, כאשר נקודת ההתחלה הייתה התנועה הבסיסית בחתכים קוניים שאותה מצא עבור שני גופים. בדרך זו הוא ניסה לקבל תוצאות איכותיות לגבי התנועה במערכת. עבור לגרנז', הבעיה התמצתה בפתרון של מערכת משוואות דיפרנציאליות, ועל-כן מטרתו הייתה מחד גיסא, למצוא את הטכניקות האלגבריות והאנאליטיות המתאימות לפתרון ולפישוט המערכת, ומאידך גיסא, להציג את המשוואות באופן שבו יוכל להסיק מהן מסקנות ביתר-קלות באופן אלגברי.

מסיבות אלה גם הכלים שבהם השתמשו היו שונים כל-כך. כמובן שניוטון לא היה יכול לעשות שימוש בכלים האנאליטיים שעמדו לרשות לגרנז' כשבעים שנה אחריו, אך האלגברה אצלו תמיד עמדה בצילה של הגיאומטריה מכיוון שבעיניו הייתה זאת קודם כל בעיה גיאומטרית-דינמית. ההיפך אצל לגרנז', שנמנע משימוש בגיאומטריה כמה שיכול. אצלו הפעולות האנאליטיות של גזירה ואינטגרציה נפרדות לגמרי מהמשמעויות הגיאומטריות שלהן, והן מהוות רק פעולות על פונקציות.

אם כן, חשיבות עבודתו של ניוטון הייתה בכך שקבע את המסגרת הפיסיקלית ואת נקודת ההתחלה המתמטית בטיפול בבעיה. כמו כן, הוא הראה את יכולותיו של טיפול גיאומטרי איכותי בבעיה. חשיבות המאמר של לגרנז' הייתה בטיפול הכללי בבעיה, ובהתייחסות לבעיה כמתמטית גרידא במנותק משיקולי כוחות.

ביבליוגרפיה

מקורות ראשיים:

1. The Principia : mathematical principles of natural philosophy, Isaac Newton; a new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, Berkeley : University of California Press, 1999.
2. Oeuvres de Lagrange : Tome 6, Lagrange, Joseph-Louis, Paris : Gauthier-Villars, 1867.

מקורות משניים:

1. Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem, Martin C. Gutzwiller, Rev. Mod. Phys. 70, 589–639 (1998), [Issue 2 – April 1998]
2. The mechanization of the world picture, E. J. Dijksterhuis, Princeton University Press, 1986.
3. http://www.transit-of-venus.org.uk/conference/print/history.pdf
4. http://physics.ucsc.edu/~michael/koll.html
5. Poincaré and the three body problem, Barrow-Green, June, Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1996.
6. Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences, edited by I.Grattan-Guiness, p. 1054-61: The three-body problem, Wilson,Curtis, London : Routledge Press, 1994.
7. Reading the Principia : the debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736, Guicciardini, Niccolò, p. 65-8, Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
8. The Newtonian revolution :with illustrations of the transformation of scientific ideas, Cohen, I. Bernard, p. 273-9, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.