האוניברסיטה העברית
הפקולטה למתמטיקה ולמדעי הטבע
החוג למתמטיקה

המתמטיקה בעולם המשפט העברי

שימושים בידע ובכלים מתמטיים לפתרון בעיות תלמודיות

מגישים: יחיאל פרנק (ת.ז. 034946046)
אמיתי כ"ץ (ת.ז. 066488651)
מנחה: פרופ' אהוד הרושובסקי

אב תשס"ה
אוגוסט 2005

תוכן עניינים

מבוא

עולם הלומדים היהודי לא עסק רבות, מאז ומעולם, במחקר מתמטי ישיר. אולם, אין ספק כי במקרים רבים נאלצו חכמי היהדות להשתמש בכלים מתמטיים על מנת לפתור בעיות הלכתיות שבהן נתקלו. שאלת יחסם של החכמים, למדע בכלל ולמתמטיקה בפרט היא ארוכה מכדי לדון בה במסגרת מצומצמת זו. אולם פטור בלא כלום אי-אפשר, לכן נפתח את עבודתנו זאת בסקירה קצרה של תולדות היחסים שבין המתמטיקה לבין היהדות.

בבואנו לנתח דברים שנכתבו בעזרת כלים מתמטיים שומה עלינו לדעת מה ידעו או לא ידעו אותם החכמים שבדבריהם אנו עוסקים. בעבודה זו לא נמנע מלנתח מקרים בכלים שוודאי שלא היו בידיהם של החכמים ודווקא משום כך חשוב שנהיה מודעים לכך.

לאחר הסקירה ההיסטורית נפנה לניתוח מספר סוגיות תלמודיות בכלים מתמטיים. לניתוח זה מטרה כפולה: הן לשפוך אור על דרך החשיבה של החכמים ולהבין טוב יותר את הלוגיקה העומדת בבסיס דבריהם והן כדי להבין בצורה טובה יותר את המבנה הכללי של מערכת החוק ההלכתי. כמובן שמפאת קוצר היריעה נעסוק כאן בדוגמאות בלבד, אך יש בדוגמאות אלו כדי לשפוך אור רב על אותם הנושאים. הדוגמאות הן מתקופות שונות של שימושים מתמטיים בתוך עולם ההלכה. לבסוף, ננסה לבחון כיצד עם התפתחות הדורות, גם החידושים המתמטיים לא פסחו לחלוטין על עולם ההלכה והמחשבה היהודיים.

סקירה היסטורית[1]

בהגיעו של אדם לדון בשאלת היחס אל המדע בכלל והמתמטיקה בפרט בעולם היהודי, שומה עליו לשים לנגד עיניו, באופן מתמיד, שני נושאים מרכזיים: הראשון, מצבו ומעמדו של המחקר המדעי-מתמטי בכל תקופה ומקום הנדונים; והשני, מעמדם של היהודים והיהדות והגורמים המרכזיים המשפיעים על החשיבה הפנים יהודית בזמן ובמקום הנדונים.

בבואנו לדון בשאלת היצירה היהודית, יש ראשית להתייחס באופן כללי לשאלה מה למעשה נכתב בתקופות השונות[2].

היצירה היהודית המוקדמת ביותר המצויה בידינו היא כמובן התנ"ך. התנ"ך, מבחינה היסטורית סיפורית פרוס על פני תקופה של למעלה מאלף שנה אולם למרות זאת בתנ"ך לא מצאנו התייחסות ישירה לשאלות מתמטיות כלשהן. אמנם לא נפתח בחיבור זה דיונים לגבי שאלות מתמטיות בתנ"ך, חשוב לזכור כי ספר זה – ובעיקר חמשת חומשי תורה שפותחים אותו – מהווה את הבסיס הרעיוני לכלל המערכת ההלכתית. לאור עובדה זאת, מרבית הדיונים שנביא לקוחים מתוך הספרות ההלכתית ששמה לה כמטרה מרכזית להבין ולפרש את דברי התורה. למרות שהפרטים שבהם נדון, על פניו נראים רחוקים מרחק רב מפסוקי התורה. חשוב לזכור כי לרבנים ולחכמים שעסקו בהן נהיר שהם נשאבים ישירות מפסוקי התורה ופסיקותיה.

חקר המדע בתקופת התנ"ך, אם ניתן להתייחס אליה כיחידה אחת, היה עדיין בחיתוליו. עם זאת, ככל הידוע, בתקופה זו, רוב האמירות המדעיות – כפי שאנו קוראים להן היום – הוגדרו כשאלות פילוסופיות גרידא. על רקע זה קל להבין למה לא ראו הנביאים צורך להתייחס לשאלות מדעיות של דורם: מבחינתם, התמצו הפילוסופיה והמדע, שהרי חד הם, באמונה באל ובשמירת מצוותיו. התנ"ך הוא חיבור קנוני, כלומר: אין מדובר בחיבור של אדם בודד, אלא ביצירה "ציבורית" אשר מטרתה לענות על שאלות כלליות שבאמונה.

לאחר חתימת התנ"ך, התרכזה העשייה היהודית[3] בדיאלוגים. בדברים ובפסיקות בעל-פה עד לכינוסם במסגרת כתיבת המשנה (בשנת 200 בערך). המשנה, בדומה לתנ"ך, איננה חיבורו של אדם בודד, אלא לקט של דוברים רבים. המשנה, כיצירה קנונית, איננה עוסקת בשאלות מדעיות טהורות, אלא בכתיבה

---

1 חלק זה עוקב אחר המופיע ב-[1], ב-[2] וב-[3]

2 הסקירה המופיעה כאן היא מעצם טבעה מוגבלת. למעשה ישנם כתבים נוספים שאליהם לא נייחס מפאת קוצר היריעה. נשתדל להתייחס לכתבים המרכזיים וכן להתייחס לדוגמאות חשובות מן התקופות השונות.

3 יש להעיר כאן כי המושג "יהודי" הוא מוטעה בהקשר זה אך אנו נשתמש בו מכיוון שהוא המושג המקובל למרות שלמעשה בתקופה התנ"כית יותר נכון להשתמש במושג "הישראלי/העברי" הכללי יותר.

של מערכת חוקים שלמה. כאן, ללא ספק, נתקלים לראשונה בהתמודדותם של חכמי ההלכה הראשונים (התנאים) בשאלות הלכתיות עם משמעות מתמטית, כגון: מהי ההסתברות למקרים מסוימים[4] ושאלות גיאומטריות שונות שעיסוק בהן מצריך ידע מתמטי ב"תורת התשבורת"[5]. חשוב להזכיר כי בתקופה זו כבר התפתחה המתמטיקה והגיאומטריה היוונית. משמע, ידע גיאומטרי ומתמטי "במערב" כבר היה בנמצא, אך לא ודאי שהיה מוכר לחכמי ישראל, שמרכזם העיקרי היה בבבל[6].

היצירה היהודית החשובה הבאה היא כמובן התלמוד[7]. התלמוד הוא למעשה הרחבה והעמקה של המשנה. התלמוד מכנס דיונים הלכתיים ופסקי הלכה בנושאים הדומים לנושאים בהם עוסקת המשנה. אך בגלל שהיקפו של התלמוד גדול בהרבה מהיקף המשנה ובגלל העובדה שבשלב זה כבר היו פזורים היהודים ברחבי העולם, ניתן למצוא בו בהבלעה התייחסויות מדעיות ומתמטיות שונות.

בשלבים אלו בהיסטוריה היהודית החלה התרחקות מכוונת של חכמי ישראל מן החוכמות שנתפסו בעיניהם כ"חיצוניות". כך למשל אנו מוצאים במשנה, במסכת סוטה (פרק 9 משנה 14) - "בפולמוס של אספסיינוס גזרו על עטרות חתנים... בפולמוס של טיטוס גזרו על עטרות כלה ושלא ילמד אדם את בנו יוונית..."
ובתלמוד הבבלי (שם) מובא: "...אותה שעה אמרו: ארור אדם... שילמד לבנו חכמת יוונית". אמנם מאוחר יותר ניתנו פרשנויות מצמצמות לאמירה זו, אבל הרושם הכללי הוא שחכמי התלמוד והמשנה מסתייגים מעיסוק ישיר בתחומי חכמה שנחשבים באופן מובהק ליווניים.[8]

אף-על-פי-כן ניתן ללמוד כי ידע מסוים, לפחות בתחומים היותר "שימושיים" של המתמטיקה, כבר נמצא בידי חז"ל. כך למשל בנוגע לשאלת היחס בין רדיוס המעגל להיקפו, אומרת המשנה (מסכת עירובין, פרק 1, משנה 5): "כל שיש בהיקפו ג' טפחים יש בו רוחב טפח", והתלמוד על המקום שואל: "מנא הני מילי? (מהיכן לקוחים דברים אלו?) אמר רבי יוחנן אמר קרא (מן הפסוקים![9]) ויעש את הים (מאגר המים שבמקדש) מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עגול סביב וחמש באמה קומתו וקו שלשים באמה יסוב אותו סביב."

מדיון זה, וכן מדיון ארוך לגבי שאלת בנייתה של סוכה עגולה בחג הסוכות, נראה כי לחכמי המשנה והתלמוד היה ידע בתחומים גיאומטריים מסוימים. מויכוח לגבי רמתו של ידע זה כבר נשפכו קולמוסים רבים של דיו. למשל, ידוע שארכימדס חישב את ערך הפאי בדיוק של 7 ספרות אחרי הנקודה העשרונית, אולם, מן הדברים דלעיל, נראה שעבור חז"ל הערך המקובל היה 3.

ניתן לראות ממקור זה וממקורות אחרים כי הידע הגיאומטרי היה קיים. רמתו הייתה שונה אצל חכמים שונים, כך שיש מהם שהיו בקיאים ביותר במתמטיקה. למרות זאת, עדיין אין הוכחות לעיסוק ישיר בחכמות מתמטיות בתקופה זאת.

החיבור המתמטי הקדום ביותר בעברית הוא "משנת המידות" אשר הודפס בשנת 1864, מתוך כתב יד שנכתב בקושטא בשנת 1480. הספר עוסק באופן ישיר בהסבר ובפיתוח של נוסחאות גיאומטריות שונות. לשונו דומה מאוד ללשון המשנה. לכן היו מי שסברו שזמנו הוא מתקופת המשנה. העובדה כי חיבור זה דומה באופן מפליא לפרק על המדידה שבספר האלגברה של המתמטיקאי הערבי הנודע מוחמד אבן מוסה אל-חְ'וָארִיזמי, בשילוב העובדה שכמה מן המונחים של משנת המידות גזורים בעליל מן הערבית, מוכיחים שמקורה בספרו של אל-ח'וואריזמי. על סמך שתי עובדות אלו, מעריכים החוקרים כיום כי זמן יצירתו של החיבור אינו מוקדם איפוא למאה התשיעית לספירה.

4 למשל לגבי שאלת קביעת הנורמות בחיוב הבאת ילדים לעולם, כמצוין להלן.

5 המונח העברי המקובל לגיאומטריה מאז ועד היום

6 כמובן שידע מתמטי, ואף נרחב למדי, היה קיים כבר בתקופה המצרית הקדומה. אולם נראה כי לא יהיה זה חטא לאמת לומר כי המתמטיקה המערבית המסודרת והנפוצה התפתחה מן התורה היוונית.

7 כידוע, התפרסמו למעשה שני תלמודים בתקופה מקבילה, פחות או יותר, האחד בבבל (התלמוד הבבלי) והשני בארץ ישראל (התלמוד הירושלמי). חשיבותו של התלמוד הבבלי גדולה בהרבה. משום שבתקופה שלאחר החורבן יצא בהדרגה המרכז היהודי מארץ ישראל ועבר לגולה.

8 מעניין להשוות התגלגלות דברים זו לטבח השבטים היהודים בידי מוחמד [4] והחדית' על פיו יש להביא דברים מפי בני ישראל. חדית' שהושם, כנראה, בפי הנביא מוחמד בתקופה מאוחרת יותר [5]

9 כוונתו כאן לספר מלכים א', פרק כ"ג

התפזרותם ההולכת וגדלה של היהודים ברחבי העולם בשנים שלאחר חיבור התלמוד, גרמה, בשל הקושי שבתקשורת שבין התפוצות, להפסקת חיבורם של חיבורים קנוניים כלליים ולהעברת הפסיקה וקביעת החוקים מהלכה למעשה, לידיהם של רבנים יחידים, הידועים גם בשם הקיבוצי "ראשונים".

אי-אפשר להתעלם משני חכמים יהודיים חשובים שנודעו בידיעתם המתמטית הרחבה בתקופת ימי הביניים. הראשון, רבי אברהם בן עזרא (1089-1164) אשר נדד בין קהילות שונות בצפון אפריקה ובאירופה. רבי בן עזרא פרסם את "ספר המספר" שהיה, למעשה, החיבור הראשון באירופה שהשתמש בספרות הערביות (אלו הן הספרות העשרוניות הרגילות, כפי שאנו משתמשים בהן כיום). הראשונים להשתמש בספרות הערביות החדשות היו המתמטיקאים ההודים. מהם למדו אותם הערבים אשר הפיצו אותם בקרב עמי הארצות אותם כבשו. השיטה פורסמה לבסוף באירופה הנוצרית על ידי המתמטיקאי האיטלקי לאונרדו פיבונאצ'י בספרו "liber abbaci". ספר זה התפרסם כמאה שנה אחרי ספרו של רבי אברהם בן עזרא.[10]

החכם השני, הוא כמובן הרמב"ם (רבי משה בן מימון) שהשפעתו על העולם היהודי הפכה, ברבות הימים, להשפעה מכרעת. הרמב"ם, הידוע כמעריץ גדול של המדע היווני, מתייחס בכתביו בעיקר לאסטרונומיה, זו הקשורה בתורתו של אריסטו בקשר עבות ובל-ינותק לעולם הגיאומטריה. למשל, בספרו "מורה נבוכים" (חלק שני, פרק 3) כותב הרמב"ם על הקשר שבין השקפת אריסטו על יצירת העולם, לבין השקפתו היהודית: "דע כי ההשקפות הללו אשר סובר אריסטו בסבות תנועת הגלגלים אשר מהם למד...". הרמב"ם ממשיך לבאר באריכות את שיטת אריסטו ומסביר מדוע, להבנתו, תואמת זאת את גישת היהדות. מן הדברים הללו ברור כי הרמב"ם הוא חכם יהודי הבקיא ברזי מדעי הטבע השונים (הרמב"ם כידוע היה גם רופא). אלו מהווים מבחינתו חלק חשוב, שאינו בר הפרדה, מהחכמה היהודית. בהיסטוריה היהודית אין עוד רבים אשר עמדתם כעמדת הרמב"ם, נהפוך הוא – הקרע שתואר לעיל, בין חכמי היהודיים לחכמת הגויים רק הולך ומחריף עם השנים.

בניגוד גמור להתפתחות אשר חלה לאורך ימי הביניים בעולם הערבי ובאזורי השפעתו, מתאפיינת ההיסטוריה האירופית הנוצרית בתקופת ימי הביניים בקפיאה של המדע בכלל, והמתמטיקה בפרט. קפיאתם של המדעים הייתה כה קיצונית כך שעד למאה ה-16 לא נוצרה באירופה התפתחות מתמטית משמעותית כלשהי. לעומת זאת, בארצות המזרח, שהיו תחת שליטת האיסלאם, פעלו מספר חכמי ישראל בתחום המתמטיקה ובייחוד בתחומים של אלגברה וגיאומטריה. ביניהם ניתן למנות את רבי אליהו מזרחי (1450-1526), שחי בקושטא וחיבר את הספר "מלאכת המספר" וכן את רבי סעדיה שוראקי, שחי באלג'יריה במאה ה-17 וחיבר את הספר "מונה מספר".

בעת החדשה, ליתר דיוק החל מן המאה ה-19, הלכה והעמיקה התהום שבין היהדות לבין המדעים. עם הצטרפותם המתמדת של יהודים רבים אל תנועת ההשכלה (ודי אם נזכיר בהקשר זה את יוסף מנדלסון), ראו יותר ויותר מן הסמכויות הרבניות בתנועת ההשכלה איום על לימודי התורה הקלאסיים ואורח החיים ההלכתי המסורתי. בתגובה לכך הלכו המוסדות המרכזיים בעולם היהודי ונסגרו בפני השפעות מן החוץ. לעומת זאת, הלכו והתרבו תנועות חדשות בעולם היהודי שראו בשילוב עם העולם המודרני הכרח קיומי. ביניהן ניתן למנות את התנועות הרפורמיות לסוגיהן ואת תנועת האורתודוכסיה המודרנית.

כיום אפשר למצוא מספר רב של רבנים וחכמים יהודיים אחרים, אשר חלק ניכר מפעילותם נסובה סביב מציאת פתרונות מתמטיים מדויקים לבעיות הלכתיות[11]. כן פועלים רבנים אשר משלבים בעולמם גם משרה אקדמית בתחומי המתמטיקה והמדעים המדויקים. עם זאת, לא כל הרבנים רואים בעין יפה את התפתחות זו.
כתוצאה ממגוון מנוגד של תהליכים אלו בימינו, שילוב של ממש בין תורות מתמטיות כחלק מן עולם הלימוד היהודי עדיין מועט מאוד. בהמשך העבודה יוצגו מספר דוגמאות אשר יעמדו על טיבו של קשר זה.

---

[10] נקודה מעניינת המבהירה את ההערכה הרבה שרחשו בזמנו ליכולתו המתמטית של בן עזרא, אפשר למצוא באגדה המספרת כי חייו וחיי תלמידיו ניצלו בזכות העובדה שפתר את חידת יוספוס:
נניח כי בספינה 30 נוסעים, מתוכם 15 "טובים" ו-15 "רעים". בעקבות סערה קשה יש לזרוק לים 15 עשר נוסעים. מציבים את כל הנוסעים במעגל וזורקים כל נוסע תשיעי לים. כיצד יועמדו הנוסעים כך שרק נוסעים "טובים" יישארו על הספינה?

[11] דוגמה טובה וייחודית בהיקפה למקרה שכזה אפשר למצוא ב-[6]

סוגיות מתמטיות-הלכתיות נבחרות

סוגיה א': מי שהיה נשוי שלש נשים (מסכת כתובות פרק 10 משנה 4)

המשנה בה נעסוק בחלק זה דנה למעשה במקרה הקלאסי של בעיית פשיטת הרגל. המשנה מביאה מקרה מעשי על מנת לדון בסוגיה:
איש אחד היה נשוי לשלש נשים[12] ומת. על פי דין תורה, במקרה זה חייבים היורשים לשלם לכל אחת מן הנשים את כתובתה[13]. המשנה מביאה שלושה מקרים לדוגמה, בהם עולה סכום כל החובות הללו על סך נכסיו של הנפטר, המסוכמים בטבלה הבאה [7, 8]:

העיזבון \ הכתובה	100	200	300
100	33⅓	33⅓	33⅓
200	50	75	75
300	50	100	150

ממקרים פרטיים אלו אי-אפשר להבחין בנקל מהו הכלל המנחה את ההחלטה המופיעה במשנה. כלומר, אין זה ברור כיצד יש להרחיב את הפסיקה הפרטית לכדי כלל מנחה בכל מקרה שהירושה או התביעות, אינן עולות בקנה אחד עם הדוגמאות המובאות במשנה. לכאורה, בחלק הראשון נוקטת המשנה בשיטת החלוקה השווה הפשוטה. ולעומת זאת, בחלק השלישי, המשנה נוקטת בשיטת החלוקה היחסית: כל אחת מן האלמנות זוכה לתשלום באופן יחסי לתביעתה (למשל הדורשת 300, מקבלת פי 3 מן התובעת 100). החלק השני במשנה הוא הפחות ברור מכולם. [7, 8, 9]

העוסקים בסוגיה בתלמוד מתקשים בהבנת המשנה. לכן בוחרים חכמי התלמוד באחת משתי דרכים: הראשונה, אוקימתא (העמדה) – החכמים אומרים שלמעשה המקרה השני עוסק באירוע מורכב המתרחש בתנאים מאוד מסוימים עבורם מתקיים פתרון זה, אך אין במשנה פתרון כללי. השנייה, "אמירה" כי משנה זו מביעה את דעתו הבלעדית של רבי נתן בשאלת פשיטת הרגל ולכן שיטה זו נדחית להלכה. הסבר זה אמנם פותר את החכמים מן הצורך להסביר את המשנה, אולם עדיין מעניין לדעת מהו פירוש עמדתו של רבי נתן בשאלה הכללית של פשיטת רגל. [7, 8, 9]

במהלך הדורות ניסו רבים לפתור שאלה זו, אך בהצלחה חלקית בלבד. נביא להלן את הסברו של פרופ' ישראל אומן, המציע פתרון אפשרי, בעל תכונות יפות העולה בקנה אחד עם הסבר המתבסס על תורת המשחקים.[14]

ראשית נדון במשנה אחרת המופיעה במסכת בבא מציעא פרק 1 משנה 1:
"...שנים אוחזין בטלית זה אומר כולה שלי וזה אומר חציה שלי זה ישבע שאין לו בה פחות משלשה חלקים וזה ישבע שאין לו בה פחות מרביע ויחלוקו..."
ההסבר המקובל להצעת החלוקה שבמשנה זו הוא כי בטענתו של הראשון מודה הוא כי מחצית אחת היא רק של חברו, כלומר: לכל הדעות חצי מן הטלית שייך לטוען כולה שלי. ואילו לגבי החצי השני ישנה מחלוקת בין שני הניצים. על כן חצי זה שבמחלוקת מחולק באופן שווה בין שניהם. [7]

אם נגדיר, עבור יותר משני בעלי דין המתווכחים על סכום מסוים, חלוקה "עקיבת טלית" (להלן: ע"ט) כחלוקה כזו שבה כל שני אנשים חולקים את הסכום שאותו הם מקבלים על פי הכלל של הטלית, נראה כעת כי בכל בעיית פשיטת רגל (בה הסכום הנמצא קטן מסך התביעות) קיים פתרון ע"ט יחיד. הכללת פתרון זה לבעיה כללית (E, d_1, d_2) והמרתו לשפה מתמטית, תובילנו למסקנה כי הסכום המוקצה לנושה i הינו:

$$x_i = \frac{E - (E - d_i)_+ - \left(E - d_j\right)_+}{2} + \left(E - d_j\right)_+$$

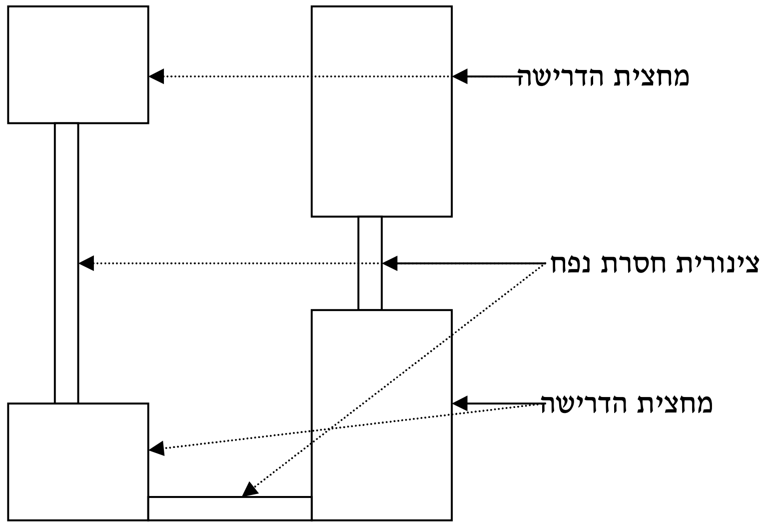
כאשר הסימון $(y)_+ = \max(0, y)$, E מסמל את סך כל הנכסים, d את תביעת האלמנה ו-x את התשלום אותו היא מקבלת. [7]

12 כידוע עד לדינו של רבנו גרשום מאור הגולה (שחי באשכנז בראשית ימי הביניים) פוליגמיה הייתה מותרת על פי ההלכה היהודית.

13 הכתובה היא למעשה שטר חוב למימון צרכי האישה שהבעל מקבל על עצמו בשעת החתונה ועליו (או על יורשיו) לשלם חוב זה לכלה במקרה של גירושין או מוות.

14 בגוף העבודה יינתן הסבר אינטואיטיבי יותר ואילו בנספח יובאו ההוכחות המתמטיות המלאות והרחבות מתמטיות נוספות.

באופן אלגורי ניתן להציג את הפתרון "בצורה פיזיקלית". נניח שכל דרישה של בעל חוב היא כלי וכל הכלים הם בעלי אותו גובה ואותו הרדיוס, כמוצג בתרשים.



תרשים: הצגה סכמטית של בעיית ירושה

כעת, אם "נשפוך" את נכסיו של החייב לתוך הכלים, הם כמובן לא יתמלאו, שהרי אנו עוסקים בבעיית פשיטת רגל. אולם קל להשתכנע שהפתרון שנקבל יהיה ע"ט כאשר עד למחצית תביעתו של הראשון נקבל חלוקה שווה. כל שקל נוסף הולך לתובע הגדול יותר, עד למילוי חצי תביעתו, מכאן שוב יתחלק הכסף שווה בשווה בין כל בעלי החוב.
מהצגה "פיזיקלית" זו של הפתרון, קל להשתכנע כי אם קיים פתרון ע"ט הוא יחיד. זאת כיוון שלכל צמד כלים, גובה הנוזל בכלים שווה, הרי שבכל הכלים הוא שווה ואז ממילא הוא יחיד. מכאן ברור שפתרון שכזה קיים, מאחר שתמיד ניתן להשיק את כל הכלים ולקבל את הפתרון[15]. [8]

פתרון זה מקיים שתי תכונות חשובות נוספות:
הראשונה, דואליות פנימית. דואליות פנימית בהקשר זה משמעותה היא שלמעשה אם במקום לחלק את התשלומים נתבונן בחלוקת ההפסדים בין התובעים, נראה כי גם ההפסדים מתחלקים בדיוק באותו אופן בו מתחלקים התשלומים. נקודה זו היא בעלת חשיבות עצומה מכיוון שבדיונים הלכתיים נוספים נמצאת התייחסות זהה לרווח ולמניעת רווח.
השנייה, עקביות פתרון זה עם בעיית המשחק הקואליציוני המתאים. המשחק הקואליציוני הוא המצב בו נניח שכל בעלי החוב הגדולים היו מתאגדים כנגד בעל החוב הקטן ביותר, ובמצב זה היו חולקים לפי כלל הטלית ולאחר מכן היו חוזרים על אותו התהליך בניהם וכך הלאה. שיטה זו מאפשרת גם למצוא, בדרך פשוטה למדי, את הפתרון הע"ט של כל בעיה. תכונה זו חשובה מאחר שאם לא כך היה, יכול היה להתקיים מצב שבו הקואליציה גורפת כסף רב יותר, מאשר היא זכאית הייתה. במקרה כזה יהיו למעשה שני פתרונות שונים כשרים הלכתית לאותה הבעיה. וזהו, כמובן, מצב לא הגיוני.

מן הדברים הללו עולה כי אפשר, בעזרת כלים השאובים מתורת המשחקים, תורה מתמטית מודרנית – ובעזרת השפה המתמטית המודרנית – להסביר את המשנה שלא הייתה מובנת במשך דורות רבים ולהראות מדוע שיטה שנדחתה להלכה, מציגה הגיון פנימי מעמיק, שאולי יוצר צדק רב יותר בפתרון בעיה של פשיטת רגל.

[15] כפי שצוין, הוכחות מתמטיות מלאות מופיעות בנספח.

פתרון נוסף למשנה זו הוצע על ידי רוברט ברודי [9]. ברודי מציע במאמרו כי שיטת החלוקה המוצעת במשנה היא החלוקה היחסית הבאה: הכסף מחולק בין התובעים השונים שווה בשווה, עד שכל אחד מהם מקבל $1/_{N-1}$ מסך כל תביעתו, כלומר: החלוקה מתבצעת בין N הנושים עד אשר בעל התביעה הקטנה ביותר מקבל $1/_{N-1}$ ושארית הכסף מחולקת שווה בשווה בצורה דומה בין $N-1$ הנושים הנותרים עד אשר כולם מקבלים חלק זה. בדרך זו ממשיכים עד לתחנה הבאה $1/_{N-2}$ מן הדרישה, כלומר: לאחר שכולם קיבלו את החלק הזה ממשיכים לחלק את הכסף עד שכל אחד מקבל $1/_{N-2}$ מדרישתו. בצורה דומה ממשיכים עם חלוקת העזבון כולו. ישנה בעיה מסוימת בחלוקה כזו: מאחר שהכסף איננו מספיק לכלל הנושים (זו הרי בעיית פשיטת רגל) מתקיים עיוות מסוים, משום שבעל הדרישה הקטנה גובה $1/_{N-1}$ לפני כל שאר הנושים [9]

לפי ברודי בשיטה זו יש הגיון משני כיוונים: הראשון, שלמעשה כמעט תמיד תשמר היחסיות של מה שמקבל כל אחד מן היורשים; והשני, ששברים "טבעיים" (בעלי מונה 1) היו נוחים לשימוש על ידי חכמי התלמוד גם בפתרון בעיות אחרות ולכן שימוש בכלי זה שומר על עקביות בעיסוק בסוגיות אחרות. מבחינה היסטורית, נראה שהיתרון הבולט של שיטה זו הוא שמנגנון חלוקה זה קרוב לוודאי שהיה ידוע גם לחכמי המשנה, עם זאת אין ספק כי אין הוא מפגין את התכונות המופלאות של הפתרון שהציע אומן. [9]

סוגיה ב': קורבן מנחה (מסכת מנחות דף 106 עמ' 1)[16]

התלמוד מצטט מקור קדום יותר בדיווח הבא:
"תנו רבנן (למדו חכמים) פירשתי מנחה וקבעתי בכלי אחד של עשרונים ואיני יודע מה פירשתי, יביא מנחה של ששים עשרונין דברי חכמים, רבי אומר: יביא מנחות של עשרונים מאחד ועד ששים שהן אלף ושמונה מאות ושלשים"

נסביר את דברי המקור, בזמן קיומו של בית המקדש הוקרבו קורבנות העשויים סולת חיטים או שעורים. קורבנות אלו נקראו בשם הכולל "מנחות". ישנם תשעה סוגים של מנחות בהם עוסקת מסכת מנחות. הקטע המצוטט עוסק במנחת נדבה אשר מועלית על ידי אדם שנדר או נדב להביאה.

הבעיה מתעוררת כאשר האדם נדר או נדב מספר כלשהו של עשרונים בכלי אחד, אך איננו זוכר לבטח מהו אותו מספר. דעת חכמים כי יביא מנחה של ששים עשרונים, משום שזוהי המנחה הגדולה ביותר אשר ניתנת לנשיאה בכלי אחד. בכך שהביא קרבן גדול יצא ידי חובתו גם אם נדר קרבן קטן. לעומת זאת, לדעת רבי, אין יוצא נודר קורבן קטן כאשר מביא קורבן גדול. לכן, לפי שיטתו של רבי, הנודר "יביא מנחות של עשרונים מאחד ועד ששים", ובכך בוודאות יענה על נדרו. לשם כך מחשב רבי: "שהן, אלף ושמונה מאות ושלושים".

התוספות[17] מבארים לנו את דרך חישובו של רבי:
"כיצד קח בידך מאחד ועד ששים וצרף תחילתן לסופן עד האמצע, כגון: אחד וששים הם ס"א שנים ונ"ט הם ס"א ושלש ונ"ח הם ס"א כך תמנה עד שלשים דשלשים ושלשים ואחד נמי הם ס"א ויעלה לך שלשים פעמים ס"א, וכן נוכל למנות פרים דחג[18] דעולין לשבעים, כיצד ז' וי"ג הם עשרים וכן ח' וי"ב הם עשרים וכן ט' וי"ח הם כ' וי' הרי שבעים."

מדוגמה זו אפשר ללמוד כי כבר לכותבי התוספות היה הידע הנדרש על מנת לחשב כל סכום שהוא של סדרה חשבונית בהפרש קבוע של 1. עם זאת, לא היה בידם את הסימון הפורמאלי אשר היה מאפשר להם לכתוב את הנוסחה הפשוטה המוכרת לכל תלמיד חטיבת ביניים כיום:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

---

[16] מבוסס על האמור ב-[10]

[17] התוספות הוא פרוש על התלמוד שנכתב על ידי חכמים שונים בימי הביניים אשר חלקם היו חתניו ונכדיו של רש"י. התוספות קיבל מקום של חשיבות בעולם היהודי מכיוון שפירושם נדפס בדפוס וילנה שהוא הדפוס המקובל לתלמוד הבבלי על אותו הדף במקביל לדברי המשנה והגמרא (התלמוד עצמו) ולפירושו של רש"י.

[18] כוונת התוספות כאן לפרים המוקרבים כקרבן בחג הסוכות. ביום הראשון מוקרבים 7 פרים ובכל יום מוסף פר אחד עד שביום האחרון מוקרבים 13 פרים.

סוגיה ג': מצוות פריה ורביה (מסכת יבמות פרק 6 משנה 6)

המשנה מציגה מחלוקת בין בית שמאי לבין בית הלל העוסקת ביציאת ידי חובת מצוות פריה ורביה: "לא יבטל אדם מפריה ורביה אלא אם כן יש לו בנים. בית שמאי אומרים: שני זכרים, ובית הלל אומרים: זכר ונקבה".

חכמי התלמוד התחבטו בשאלה מיהו למעשה הצד המקל מבין שני בתי החכמים המובאים במשנה. הדיון חשוב מכיוון שבמסכת עדויות (פרקים 4 ו-5) נמנים כל המקרים בהם מקל בית שמאי, לעומת בית הלל[19], אך המחלוקת בסוגיה זו אינה נמנית עמם.

יש לשים לב כי במקרה שבו נולדים שני זכרים יצא חובת מצוות פריה ורביה – לפי בית שמאי; אך לא לפי בית הלל. כלומר: במקרה שכזה למעשה יקלו בית שמאי. על מנת להסביר תופעה זו מבאר רבי בון בתלמוד הירושלמי:

"לכן צריכא <u>אפילו</u> זכר ונקבה (לא התכוונו בית הלל לומר דוקא זכר ונקבה אלא <u>אפילו</u>, כלומר: בית הלל מסכימים שבשני זכרים די, אלא שלדעתם גם זכר ונקבה מספיקים. מכאן שבית הלל בודאי מקילים במקרה זה), **דלכן הוא** מתניתא מקולי בית שמאי ומחומרי בית הלל (שאם לא תגיד כך משנה זו היא מקרה בו בית שמאי מקילים אך אין היא מפורטת במסכת עדויות ולכן זה בלתי אפשרי)"[20].

משמעות דבריו של רבי בון הינה כי בית הלל אומר כי אף במקרה של לידת זכר ונקבה יוצא ידי חובה. זאת בניגוד לבית שמאי הדורשים שני זכרים.

לעומתו פוסקים הרמב"ם[21] ואחריו מחבר שולחן ערוך[22] כי אין יוצאים אלא אחרי שנולדו בן ובת – כך שלמעשה בית הלל מחמירים.

אלכסנדר קליין [11] מציג גישה חדשה ומודרנית לבעיה: הגדרת המחמיר, כמי שדורש את קיומו של מאורע שכיח פחות. קליין מראה שתי אפשרויות ליישום רעיון זה. האחת, בדיקת ההסתברות שזוג הורים ייצא ידי חובתו לאחר הולדת שני ילדים – לפי שיטת בית שמאי הסתברות זו היא רבע[23] ולפי שיטת בית הלל חצי; השנייה, בדיקת התוחלת – לפי בית שמאי עליך להשיג שתי "הצלחות" בתום k לידות ("ניסויים"), כלומר: מודל התפלגות בינומית שלילית עם תוחלת 4 ולפי בית הלל ההסתברות לקיים את המצווה בלידה ה-k היא ההסתברות שיוולד לראשונה בפעם ה-k או בן או בת (בהתאם למין הילודים הקודמים), כך שמודבר כאן במודל של התפלגות גיאומטרית עם תוחלת 3. מכאן יוצא כי בכל אחד מן המקרים, בית הלל מקל לעומת בית שמאי, מאחר שהם דורשים פחות מאמץ בממוצע.

מסוגיה זו ודומות לה נראה כי העולם ההסתברותי לא היה זר כלל לחז"ל. לכן אין זה מן הנמנע שאי-הכללתה של מחלוקת זו במסכת עדויות, מקורה בהבנת חז"ל את מהותם של התהליכים ההסתברותיים, אף כי בודאי לא הכירו את הפורמליזם המודרני[24].

---

19 בדרך כלל חכמי בית הלל נוטים להקל בשאלות הלכתיות אל מול חכמי בית שמאי הידועים בשיטתם ש "יקוב הדין את ההר". לכן מונה המשנה מקרים שהם יוצאי הדופן בהקשר זה.

20 הסבר הקטע המופיע בסוגריים נעשה על פי פירוש "קרבן העדה" שהוא פירוש מימי ביניים שמסביר את פשט דברי התלמוד הירושלמי הכתוב פעמים רבות בשפה קשה ולא מובנת וחסר מילות קישור רבות.

21 הרמב"ם, **הלכות אישות**, פרק ט"ו, פסקה ד

22 רבי יוסף קארו, **אבן העזר**, פרק א', פסקה ה

23 אנחנו מניחים כי ההסתברות להולדת בן זהה להסתברות להולדת בת

24 בהקשר זה כדאי לעיין גם ב-[12]

מילות סיכום

בעבודה זו באנו לבחון במידת מה את התשובה לסוגיה המעניינת: מהו הידע המתמטי שהיה קיים במשך הדורות בתוך עולם החכמה היהודית. מצאנו כי עיסוק ישיר בסוגיות מתמטיות היה נדיר בעולם היהודי. אולם, מן הסוגיות שבחנו[25] מצאנו כי שיקולים מתמטיים היוו פעמים רבות כלי מרכזי בדרכם של חז"ל בקבלת החלטות הלכתיות בתחומים שונים. כמו-כן נראה כי במקומות ובזמנים שבהם הכלים המתמטיים היו זמינים יותר, אפשר להבחין שנעשה שימוש רחב יותר בהם.
אם כן אין זה מפתיע כלל לראות כי עם התפתחות הכלים המתמטיים וחדירת לימוד תחום זה לתוך העולם היהודי נמצאו מתמטיקאים שניסו לפתור באמצעות כלים אלו, סוגיות הלכתיות שנשארו "פתוחות" במשך הדורות.

בעולם החכמה היהודית מנחה הכלל "אלו ואלו דברי אלוהים חיים", כלומר: כוחו של הלימוד הוא ביכולת להגיד ולחדש. השימוש בכלים המודרניים של המתמטיקה הולם היטב קו מחשבה מרכזי זה. אנו תקווה שגם דברינו בחיבור צנוע זה הם בבחינת דברי אלוהים חיים והוסיפו משהו להבנת יחסי הגומלין המרתקים שבין עולם החכמה היהודית (שלפחות מבחינת היקפו ותפוצתו העממית הקדים בשנים רבות את ההשכלה), לבין עולם ההשכלה הכללית שבמאתיים השנים האחרונות הגיע להישגים עצומים בחקר העולם. המתח בין שני העולמות, הדתי (לא רק היהודי) והמדעי, ניכר כיום בכל פינה ופינה. לכן אנו מקווים שיש במאמר זה תרומה מזערית לבניית גשר של אמון בין שני העולמות הללו.

ביבליוגרפיה

[1] בן עמי צרפתי, גד, אברהם אבן עזרא והספרות הערביות
(http://alefefes.macam.ac.il/sofrim/sofrim.asp?n=4)

[2] פלג, נצחיה, קרני, נעמה, רוזליו, מירב, ספר מונה מספר
(http://alefefes.macam.ac.il/sofrim/sofrim.asp?n=2)

[3] Elon, Menachem (Ed.), "*Mathematics*", in: Encyclopaedia Judaica, Jerusalem 1975

[4] הירשברג, חיים זאב, *"היהודים בארצות האסלאם"*, בתוך: פרקים בתולדות הערבים והאסלאם (עורכת: לצרוס-יפה, חוה), תל-אביב, תשכ"ז 1967, עמ' 267

[5] שרון, משה, סיכומי ההרצאות בקורס "מאיסלאם לדת הבהאאית", תשס"ד
(http://spin.intertent.net/amitay/Misc/Islam/IslamNB.pdf)

[6] קופל, משה, סדר קנים: ביאור חדש למסכת קני ע"פ תורת החשבון, ירושלים 1998

[7] Aumann, Robert J. & Maschler, Michael, "*Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*", in: Collected Papers, Cambridge, US 2000

[8] אומן, ישראל, *"בעניין מי שהיה נשוי שלוש נשים"* בתוך: מוריה 22, 3-4, טבת תשנ"ט, ינואר 1999, עמוד 98-107

[9] ברודי, רוברט, *"שלשה שהטילו לכיס" – לבירור שיטות התנאים'*, בתוך: הגיון: מחקרים בדרכי החשיבה של חז"ל, ירושלים

[10] חריר, שלמה, שימוש בסוגיות תלמודיות-מתמטיות בהוראה (במסגרת עבודת מחקר לקבלת התואר דוקטור לפילוסופיה), חיפה תשנ"ט

[11] קליין, אלכסנדר, *"מיהו המקל במצוות פריה ורביה?"*, בתוך: הגיון: מחקרים בדרכי החשיבה של חז"ל 2, ירושלים תשמ"ט

[12] קליין, אלכנסדר, *"חישוב הסתברותי במשנה"*, בתוך: היגיון: מחקרים בדרכי החשיבה של חז"ל 5, ירושלים תשס"א

[25] הצגנו כאן רק מספר מצומצם של דוגמאות מתוך הסוגיות שאותן למדנו ובהן עסקנו לצורך עבודה זו. מפאת קוצר היריעה נאלצנו לוותר פה על הפירוט בעניינן.

נספח: הצגה מתמטית של סוגיה א'[26]

פתרון טלית

בטרם הצגת תשובות אלו מציג אומן לקורא את הבעיה התלמודית "שניים אוחזים בטלית": שני אנשים אוחזים בטלית וטוענים האחד לבעלות על מחיצתה והשני לבעלות על כולה. התלמוד פותר את הבעיה כאשר הוא מעניק לראשון רבע מן הטלית ולשני שלושה רבעים וזאת בניגוד למשפט המקובל כיום אשר היה מחלק את הטלית ביחס לדרישות, משמע שליש ושני שליש.

הכללת פתרון זה לבעיה כללית (E, d_1, d_2) והמרתו לשפה מתמטית תובילנו למסקנה כי הסכום המוקצה לנושה i הינו:

$$x_i = \frac{E - (E - d_i)_+ - (E - d_j)_+}{2} + (E - d_j)_+$$

כאשר $\theta_+ = \max(\theta, 0)$.

מונוטוניות פתרון הטלית

נסתכל על התנהגות הפתרון כפונקציה של E. נניח כי $d_1 \leq d_2$. כאשר E קטן (מן החוב הקטן ביותר), הירושה מחולקת שווה בשווה עד אשר הירושה מגיעה לגובה מחצית דרישת הנושה הראשון. כל זוז נוסף ניתן לנושה השני עד אשר הוא מקבל מחצית דרישתו. לאחר מכן כל זוז נוסף מחולק שווה בשווה בין שני הנושים. משמעות החלוקה הזאת היא כי פתרון הטלית הוא מונוטוני ב-E כאשר d_1, d_2 קבועים.

עקביות

בעיית ירושה

נגדיר בעיית ירושה כזוג $(E; d)$ כאשר $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$ ו-$0 \leq E \leq d_1 + \ldots + d_n$.
פתרון לבעיה כזאת יוגדר כ-n-יה $x = (x_1, \ldots, x_n)$ של מספרים ממשיים המקיימת $x_1 + \ldots + x_n = E$.

פתרון עקיב-טלית

נאמר כי פתרון הוא עקיב-טלית אם עבור כל $i \neq j$ החלוקה של $x_i + x_j$, לפי הפתרון (x_i, x_j), לנושים d_i, d_j עונה לפתרון הטלית.

טענה: לבעיית ירושה יש פתרון עקיב-טלית יחיד

<u>הוכחת היחידות</u>: אם קיימים שני פתרונות x ו-y נאמר כי בה"כ $x_i > y_i$, $x_j > y_j$ ו-$x_i + x_j \geq y_i + y_j$. ממונוטוניות פתרון הטלית עבור שני נושים נקבל כי $x_j \geq y_j$ בסתירה לכך ש-$x_j < y_j$.

<u>הוכחת הקיום</u>:
על מנת להראות את קיום הפתרון נבחן את הפתרון כפונקציה של E. כאשר E קטן כולן מקבלות שווה בשווה עד אשר הראשונה מקבלת $\frac{d_1}{2}$ ויוצאת מן החלוקה. $n-1$ הנשים הנותרות מחלקות את הירושה ביניהן שווה בשווה עד אשר השנייה מקבלת $\frac{d_2}{2}$ ויוצאת מן החלוקה. באופן דומה ממשיכים עד אשר העיזבון הוא בשווי חצי כלל החובות $\frac{D}{2}$ $(D = d_1 + \ldots d_n)$. כאשר $E \geq \frac{D}{2}$ נתאר את תהליך המראה של התהליך הקודם: במקום לחשוב על ההחזר שתקבל האישה ה-i (x_i), יש לחשוב על הפסדה $d_i - x_i$. כאשר ההפסד הכללי $D - E$ קטן, הוא מתחלק שווה בשווה בין כל הנשים, כך שהאישה ה-i תקבל החזר בגובה $d_i - \frac{(D-E)}{n}$. ההפסד מחולק שווה בשווה כל עוד לא איבדה

[26] חלק זה הוא תקציר ערוך ומתורגם של [7]

האישה הראשונה $\frac{d_1}{2}$ מדרישתה (כלומר: מקבלת $\frac{d_1}{2}$ מדרישתה). משלב זה מחולק ההפסד שווה בשווה בין שאר הנשים, גם בפעם זו עד אשר האישה השנייה מאבדת $\frac{d_2}{2}$ מדרישתה. התהליך ממשיך כך עד אשר האישה ה- n מאבדת $\frac{d_n}{2}$ מדרישתה. מצב זה מתרחש בדיוק כאשר $E = \frac{D}{2}$. קיבלנו תיאור מלא של ההצעה לקבלת פתרון עקיב-טלית לכל עזבון.

מסיבות פרקטיות יהיה כדאי לתאר תיאור חלופי לתיאור הקודם אשר כולו במונחים של רווח. כזכור, כאשר E קטן רק במעט מ- $\frac{D}{2}$ מקבלת בשלב זה כל זוז נוסף. היא ממשיכה לקבל כל זוז נוסף עד אשר היא מגיעה ל- $d_n - \frac{d_{n-1}}{2}$, אז מתחילה האישה ה-$n-1$ לקבל גם היא חצי מן הזוזים הנותרים. תהליך זה ממשיך עד אשר שתיהן מקבלות את כל הסכום שהן דורשות למעט $\frac{d_{n-2}}{2}$ (קורה בו-זמנית) ושם נכנסת לתמונה האישה ה-$n-2$. התהליך ממשיך בצורה זהה עד אשר כולן מקבלות את דרישתן למעט $\frac{d_1}{2}$. משם מתחלק הכסף הנותר שווה בשווה בין כל הנשים.

נבחר שתי נשים i, j כך ש-$d_i \le d_j$. כאשר E קטן, הם מקבלים סכומים שווים. מצב זה ממשיך עד אשר אישה i מקבלת $\frac{d_i}{2}$. מעבר לכך, אישה j מקבלת $d_j - \frac{d_i}{2}$. מעבר לכך, נשים i, j מקבלות חלקים שווים מן יתרת הירושה. זהו בדיוק התיאור המילוי של פתרון הטלית שתואר בחלק "מונוטוניות פתרון הטלית". מכאן כי הפתרון שתואר הוא אכן עקיב-טלית.

כלל
נגדיר כלל כפונקציה המתאימה לכל בעיית ירושה פתרון.

הכלל העקיב-טלית
הכלל העקיב-טלית הוא הכלל המקצה לכל בעיית ירושה את הפתרון העקיב-טלית המתאים לה.

כלל עקיב-פנימית
כלל ייקרא עקיב-פנימית אם $f(E;d) = x \Rightarrow f(x(S), d|_S) = x|_S$ לכל קבוצה S של נושים (כאשר $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$).

טענה: הכלל העקיב-טלית הוא עקיב-פנימית
<u>הוכחה</u>
יהי $(E;d)$ בעיית ירושה, x פתרונה העקיב-טלית, g הפונקציה המחזירה לכל בעיית ירושה של זוג את פתרונה ו-S קבוצת נושים. לכל $i \ne j$ מעקביות-טלית x מקבלים $(x_i, x_j) = g(x_i + x_j; d_i, d_j)$ ובפרט עבור $i, j \in S$. מכאן כי $x|_S$ הוא הפתרון העקיב-טלית של $(x(S), d|_S)$

דואליות-פנימית וחלוקה שווה מוכרחת

כלל דואלי

נגדיר את הכלל הדואלי f^* של הכלל f על ידי: $f^*(E;d) = d - f(D-E;d)$

משמעות הדבר כי f^* מחלק רווחים כפי ש-f מחלק הפסדים.

דואליות פנימית

כלל יקרא כלל דואלי-פנימית אם $f^* = f$, כלומר: הכלל מטפל בצורה זהה ברווחים ובהפסדים.[27]

טענה: הכלל העקיב-טלית הוא כלל דואלי-פנימית

ההוכחה ברורה מן התיאור בחלק הקודם של בניית הפתרון העקיב-טלית.

פתרון חלוקה שווה מוכרחת

נגדיר פתרון חלוקה שווה מוכרחת של בעיית ירושה $(E;d)$ כפתרון מהצורה $(\alpha \wedge d_1, \ldots, \alpha \wedge d_n)$ כאשר $\alpha \wedge b := \min(\alpha, \beta)$.

טענה: לכל בעיית ירושה קיים פתרון חלוקה שווה מוכרחת יחיד

<u>הוכחה</u>

נגדיר את הפונקציה: $h(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \alpha \wedge d_i$.

נשים לב כי $h : [0, d_n] \to [0, D]$ פונקציה רציפה עולה ממש. מכך ש-$D \geq E$ וממשפט ערך הביניים נקבל כי קיימת נקודה x_0 כך ש-$h(x_0) = E$. מן המונוטוניות החזקה נקבל כי נקודה זו יחידה.

חשיבות פתרון החלוקה השווה המוכרחת

פתרון החלוקה השווה המוכרחת אומץ על ידי הרמב"ם. ממשיכו הרוחני, רב"ד (רבי אברהם בן דוד) בחר בכלל אחר: עבור $E \leq d_1$ מתחלקת הירושה בין כל הנושים. כאשר $E \geq d_1$ שארית הכסף מתחלקת בין כל הנושים למעט הראשון וכאשר $E \geq d_2$ עוזב גם הנושה השני את התמונה ושאר הכסף מתחלק בין $n-2$ הנושים הנותרים וכן הלאה. החוק איננו מוגדר לאחר $E = d_n$.

שני הכללים האחרונים שתוארו חשובים בעיקר בשל הופעת הכללים הדואלים להם בתלמוד (ערכין כ"ז ב'): במכירה פומבית ישנם n מציעים: $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. אם n נושר מן המכרז האובייקט נרכש על ידי $n-1$ והמציע ה-n נאלץ לשלם את ההפסד למוכר: $b_n - b_{n-1}$. אם הן המציע ה-n והן המציע $n-1$ נושרים משלם המציע ה-n את ההפרש $b_n - b_{n-1}$ והמציע ה-$n-1$ משלם את ההפרש $b_{n-1} - b_{n-2}$. אך מה יש לעשות במידה וכל n המציעים מחליטים שאין ברצונם לרכוש את החפץ?

הרמב"ם קובע כי עליהם לשלם שווה בשווה את ההפסד ובוודאי שאף אחד מהם אינו משלם יותר מהצעתו המקורית. לעומתו הרב"ד קובע שיש לחלק את ההפסדים ל-n מקטעים:
$b_1, b_2 - b_1, \ldots, b_n - b_{n-1}$. המקטע הראשון משולם על ידי כל המציעים, המקטע השני יחולק על ידי $n-1$ המציעים האחרונים וכן הלאה.

שורשיהם של ההצעות הנ"ל נטועים בשני רעיונות המחייבים את הפוסקים ליצור כלל דואלי:
(1) ההתייחסות למענקים ולהפסדים זהה
(2) אין זה משנה אם אנו חושבים על התוצאה כעל הפסד או כעל רווח

השינוי האיכותי בפתרון העקיב-טלית

דואליות היא רק אחת משתי התכונות העיקריות של הפתרון העקיב-טלית. התכונה השנייה הייתה השינוי האיכותי החל בנקודת חצי-הדרך $E = \frac{D}{2}$. שורשי רעיון זה נטועים עמוק במשפט התלמודי המתייחס אל יותר מחצי כאל הכול ואל פחות מחצי כשולי וזניח. דוגמה חשובה להשקפה זאת אפשר למצוא בערכין כ"ג ב', העוסק בהלוואות. השקפה קיצונית זו אומרת למעשה כי אין זה הוגן להעניק עדיפות לאחד מן הצדדים להיות "שמח יותר", או שלם יותר עם החלוקה.

---

[27] כללים אלו טובים לבעיות שבהן אין מבט טבעי של "רווח" או מבט טבעי של "הפסד".

טענה: הכלל העקיב-טלית הוא הכלל הדואלי-פנימית, שכאשר $E \leq D/2$ מקצה לבעיה $(E;d)$ את פתרון החלוקה השווה המוכרחת של הבעיה $\left(E;d/2\right)$.

הוכחה

זוהי למעשה תוצאה ברורה מן ההוכחה כי לבעיית ירושה יש פתרון עקיב-טלית יחיד.

מונוטוניות הפתרון העקיב-טלית

כלל f יקרא מונוטוני אם $f_i(E;d)$ הוא פונקציה לא יורדת של E כאשר i ו- d מוחזקים קבועים. משמעות הדבר ששום נושה איננו מפסיד מן העלייה בירושה.

פתרונות משמרי סדר

אנו נקרא לפתרון x לבעיית ירושה $(E;d)$ משמר סדר אם $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ ו- $0 \leq d_1 - x_1 \leq \ldots \leq d_n - x_n$. משמעות הדבר כי חלוקת ההפסד והרווח יחסית לדרישת הנושה. כפי שצויין, החוק העקיב-טלית הוא המונוטוני ולכן נותן פתרונות משמרי-סדר.

ישנם חוקים אחרים אשר הם משמרי סדר ובניהם פתרון החלוקה היחסית לדרישות, פתרון החלוקה השווה המוכרחת ופתרונו של רב"ד.

מבנה קואליציה והתלמוד הירושלמי

בתלמוד הירושלמי, במשנה הנידונה (כתובות, פרק 10, דף ד') נאמר: "שמואל אמר במרשות זו את זו בשהרשת השלישית את השנייה לדון עם הראשונה אמרה לה לא מנה אית לך סב חמשין ואיזל לך"
(שתי הנשים מעניקות סמכות זו לאו. בפירוט, השלישית מסמיכה את השניה לדון עם הראשונה. זאת יכולה לומר לראשונה: טענתך היא מאה? קחי לך 50 ולכי).

רבי שמואל מתייחס, כמובן, רק למקרים בהם העזבון הוא 200 או 300. במקרה זה יוצרות הנשים בעלות הדרישות הגבוהות קואליציה "אל מול" בעלת הדרישה הנמוכה. כך נוצר מקרה בו נותרים שני דורשים: האחד עם דרישה של 500 והשני עם דרישה של 100. מהפעלת כלל הטלית נוצרת החלוקה של 50 עבור האישה הראשונה והיתר לקואליציה. הפעלת כלל הטלית שוב על הסכום הנותר תוביל לחלוקה אשר רשומה במשנה.

ניסיון להפעיל את תהליך זה עבור המקרה עם עזבון בגובה 100 תוביל לפתרון $(50,25,25)$ אשר איננו משמר סדר. תהליך זה מפיק פתרונות משמרי סדר רק עבור עזבון הגדול מ-150 וקטן מ-450. מעל עזבון 450 אין שימור סדר עבור ההפסדים. לדוגמה, עבור עזבון 500 נקבל פתרון $(50,175,275)$.

התוצאה המתקבלת מהפעלת כלל הטלית עבור שלושה אנשים בשיטה שתוארה תוביל לתוצאה משמרת סדר אם ורק אם $\frac{3d_1}{2} \leq E \leq D - \frac{3d_1}{2}$. אם נחלק את העזבון שווה בשווה כאשר $E \leq \frac{3d_1}{2}$ ואת ההפסד כאשר $E \geq D - \frac{3d_1}{2}$ נקבל בדיוק את הפתרון העקיב-טלית על כל הטווח $0 \leq E \leq D$.

שימוש באינדוקציה יוביל אותנו בצורה טבעית להכללה עבור כל n נושים. נניח כי כבר ידוע הפתרון עבור בעיית $n-1$ הנושים. בהתאם לגדלים E ו- d נפתור את בעיית n הנושים באחת משלוש הדרכים הבאות:

א. נחלק את E בין $\{1\}$ לבין $\{2,\ldots,n\}$ בהתאם לפתרון העקיב-טלית של בעיית 2 הנושים $(E;d_1,d_2+\ldots+d_n)$ ונשתמש בחלוקה בכלל עבור $n-1$ הנושים, הידוע מן האינדוקציה, לחלק את הסכום הנותר עבור חברי הקואליציה $\{2,\ldots,n\}$.

ב. נחלק מענקים שווים לכל הנושים

ג. נחלק הפסדים שווים לכל הנושים

בצורה מפורטת יותר – סעיף א' יופעל כאשר התוצאה המתקבלת הינה משמרת-סדר, כלומר: $\frac{nd_1}{2} \leq E \leq D - \frac{nd_1}{2}$; סעיף ב' יופעל כאשר $E \leq \frac{nd_1}{2}$; וסעיף ג' יופעל כאשר $E \geq D - \frac{nd_1}{2}$.

לתהליך זה נקרא התהליך הקואליציוני.

טענה: התהליך הקואליציוני מפיק את הפתרון העקיב-טלית לכל בעיית ירושה.
ההוכחה ברורה.

חשוב להדגיש כי טענה זו והטענה כי לבעיית ירושה יש פתרון עקיב-טלית יחיד משתמשות בעקרון הטלית לתיאור אותו כלל; עם זאת, שני האפיונים שונים במהותם. הטענה כי לבעיית ירושה יש פתרון עקיב-טלית יחיד מיישמת את עקרון הטלית לצמדים של *יחידים* בלבד והעיקרון תקף לכל $\binom{n}{2}$ הזוגות. $\binom{n}{2}$ התנאים הנוצרים מן הדרישה הם תוצאה רצויה של הפתרון, אך אינם מספרים לנו כיצד באפשרותנו לבנות פתרון שכזה. אין זה ברור א-פריורית שבידי החכמים היה פתרון בו-זמנית לכלל הבעיות, או שלא היה להם יותר מאחד. מנגד, הטענה האחרונה מפעילה את עקרון הטלית עבור זוגות של *קואליציות*; ומתארת תהליך צעד-אחר-צעד, אשר מתוקף הגדרתו מוביל לפתרון יחיד, אבל תהליך זה מתאים רק לזוגות הנבחרים בקפידה של קואליציות.

הגרעינון (Nucleolus) והליבה (Kernel)

מושגים בסיסיים בתורת המשחקים
משחק שיתופי הוא פונקציה v המחזירה, לכל תת-קבוצה S של קבוצה סופית N, מספר ממשי $v(S)$ (ובקצרה: $v : 2^N \to \mathbb{R}$). איברי N נקראים שחקנים והקבוצות S קואליציות. באופן אינטואיטיבי, $v(S)$ מייצג את התשלום שקואליציה S יכולה לקבל לעצמה, בלי עזרה של משתתפים אחרים. מוסכם כי $v(\varnothing) = 0$. וקטור תשלום הוא וקטור x עם רכיבים המאונדקסים בהתאם לשחקנים, כלומר: x_i מייצג את התשלום לשחקן ה-i. מושגים של פתרון של משחק (Solution Concepts, ולהלן מושגי פתרון) מחזירים לכל משחק וקטור תשלום. כל קונספט שכזה מייצג רעיון של יציבות, תוצאה צפויה וכד'. במקרים רבים, מושג הפתרון מקשר משחק עם מספר וקטורי תשלום, או עם אף אחד. רק שניים מן מושגי הפתרון הידועים היטב מקשרים וקטור תשלום יחיד לכל משחק. אלו הן: ערך שפלי והגרעינון.

התאמת בעיית הירושה למשחק שיתופי
בעיית הירושה כפי שהוצגה לעיל איננה משחק. קואליציות אינן מופיעות במפורש בפורמליזם של הבעיה. דרך טבעית לקשר משחק עם בעיית הירושה $(E;d)$ היא לזהות את הערך של S עם הסכום אשר היא יכולה לקבל בלי להגיע לבית המשפט. כלומר: לקבל כלום או את מה שנותר מן הנכס E לאחר שכל חבר i בקואליציה המשלימה $N \setminus S$ קיבל את כל דרישתו d_i. לכן אנו מגדירים את משחק הירושה $v_{E;d}$ המתאימה לבעיית הירושה $(E;d)$ על ידי:

$$v_{E;d} := (E - d(N \setminus S))_+$$

משפט 1: הפתרון העקיב-טלית של בעיית הירושה הוא הגרעינון של המשחק המתאים.
ההוכחה של משפט זה משתמשת במספר מסקנות ורעיונות של תורת המשחקים השיתופיים ואנו נחזור עליה בהמשך לאחר הנחת היסודות.

המשחק המצומצם
יהי v משחק, S קואליציה ו-x וקטור תשלום. המשחק המצומצם $v^{S,x}$ מוגדר על מרחב השחקנים S על ידי:

$$v^{S,x} = \begin{cases} x(T) & if \qquad T = S \vee T = \varnothing \\ \max\{v(Q \cup T) - x(Q) | Q \subseteq N \setminus S\} & if \qquad \varnothing \subsetneqq T \subsetneqq S \end{cases}$$

במשחק המצומצם השחקנים מחליטים כיצד לחלק את הסכום הכולל המוענק להם על ידי x תחת ההנחה כי שחקן i מחוץ ל-S מקבל בדיוק x_i. יחדיו כל השחקנים של S מקבלים $x(S)$ וכתמיד הקבוצה הריקה איננה מקבלת תשלום. אם תת-קואליציה לא ריקה T מוכלת ממש ב-S בוחרת קבוצה Q של "שותפים" מחוץ ל-S, היא תהיה בעלת ערך כולל של $v(Q \cup T)$, אבל במטרה לשמור את השותפים מרוצים היא חייבת לשלם להם את הסכום $x(Q)$ המוענק להם על ידי x. משמעות הדבר כי תת-קואליציה T תבחר שותפים Q במטרה למקסם את הביטוי $v(Q \cup T) - x(Q)$ אשר יישאר להם לאחר התשלום לשותפיהם.

למה 2: **יהי** x **פתרון של בעיית הירושה** $(E;d)$**, כך ש-** $0 \le x_i \le d_i$ **לכל** i**.**
אזי לכל קואליציה S $v^{S;x}_{E;d} = v_{x(S);d|S}$
(או במילים: משחק הירושה המצומצם הוא המשחק המתאים לבעיית פשיטת הרגל המצומצמת).

<u>**הוכחה**</u>
נקבע $v := v_{E;d}$ **ו-** $v^S := v^{S,x}_{E;d}$**. ראשית, תהי** $\varnothing \subsetneqq T \subsetneqq S$ **וניתן למקסימום בהגדרה של** $v^S(T)$
להתקבל עבור Q**. מאחר ש-** $x_i \ge 0$ **ו-** $a_+ - b_+ \le (a-b)_+$ **לכל** a,b **נקבל כי:**

$$v^S(T) = v(T \cup Q) - x(Q) \qquad \text{לפי הגדרת } v^S$$
$$= (E - d(N \setminus (Q \cup T)))_+ - (x(Q))_+ \qquad \text{לפי הגדרת } v$$
$$\le (E - d(N \setminus (Q \cup T)) - x(Q))_+ \qquad \text{מההערה לעיל ומכך ש- } x(N) = E$$
$$= [x(S) - d(S \setminus T) - (d - x)(N \setminus (S \cup Q))]_+$$
$$\le (x(S) - d(S \setminus T))_+ \qquad \text{מכך ש- } x_i \le d_i$$

עבור $Q = N \setminus S$ **נקבל כי:**

$$\begin{aligned} v^S(T) &\ge v(T \cup (N \setminus S)) - x(N \setminus S) \\ &= (E - d(N \setminus (T \cup (N \setminus S))))_+ - (x(N) - x(S)) \\ &\ge (E - d(S \setminus T)) - (E - x(S)) \\ &= x(S) - d(S \setminus T) \end{aligned}$$

ועבור $Q = \varnothing$**:**

$$\begin{aligned} v^S(\varnothing) &\ge v(T \cup \varnothing) - x(\varnothing) \\ &= v(T) = (E - d(N \setminus T))_+ \ge 0 \end{aligned}$$

משני אי-שוויונים האחרונים נקבל כי:

$$v^S \ge (x(S) - d(S \setminus T))_+$$

ביחד עם אי-השיוויון הראשון קיבלנו כי:

$$v^S = (x(S) - d(S \setminus T))_+ = v_{x(S);d|_S}(T)$$

עבור המקרים בהם $T = \varnothing, N$ **הנוסחה האחרונה מיידית וסיימנו.**

הליבה והטרום-גרעין
יהי v **משחק. לכל וקטור תשלומים** x **וזוג שחקנים** i,j **נגדיר** $s_{ij} := \max\{d(S) - x(S) | i \in S \wedge j \notin S\}$**.**

טרום-גרעין (pre-kernel) **של המשחק** v **הינה קבוצת כל וקטורי התשלום** x **כך ש-** $x(N) = v(N)$ **וכן** $s_{ij} = s_{ji}$ **לכל** i,j**.**
הליבה של v **היא קבוצת כל וקטורי התשלום** x **כך ש-** $x(N) = v(N)$**,** $x_i \ge v_i$ **לכל** i**,**
ולכל i,j $s_{ij} > s_{ji} \Rightarrow x_j = v(j)$

הפתרון הסטנדרטי למשחק שני שחקנים

נגדיר את הפתרון הסטנדרטי למשחק שני שחקנים עם קבוצת שחקנים $\{1,2\}$ להיות:

$$x_i = \frac{v(12) - v(1) - v(2)}{2} + v(i)$$

נשים לב כי הגדרה זו שקולה לכך ש-

$$x_1 + x_2 = v(12); x_1 - x_2 = v(1) - v(2)$$

אפשר לומר כי הפתרון הסטנדרטי נותן לכל שחקן i את הסכום $v(i)$ אשר הוא יכול להבטיח לעצמו ומחלק את השארית שווה בשווה בין שני השחקנים. הגרעינון והליבה (כאשר אינם ריקים[28]), הטרום-גרעין וערך שפלי של משחק שני שחקנים, תואמים כולם את הפתרון הסטנדרטי של המשחק. כך גם רוב פתרונות המיקוח (Barging Solutions) הידועים. אכן, הפתרון הסטנדרטי מייצג את מושג הפתרון הסימטרי וה-efficient point-valued היחיד למשחק שני שחקנים אשר הוא קוואריאנטי תחת שקילות אסטרטגית (Strategic Equvalence)

למה 3: יהי x בטרום-גרעין של משחק v, ו- S קואליציה עם שני שחקנים אזי $x|_S$ הוא הפתרון הסטנדרטי של $v^{S,x}$

<u>הוכחה</u>

יהי $S = \{i,j\}$, אזי:

$$s_{ij} = \max_{Q \subseteq N \setminus S} \{v(Q \cup i) - x(Q \cup i)\}$$
$$= \max_{Q \subseteq N \setminus S} \{v(Q \cup i) - x(Q) - x_i\} = v^{S,x}(i) - x_i$$

באופן סימטרי, $s_{ji} = v^{S,x}(j) - x_j$. מהגדרת הטרום-גרעין $s_{ij} = s_{ji}$ ומכאן כי $x_i - x_j = v^{S,x}(i) - v^{S,x}(j)$ וכן $x_i + x_j = x(i,j) = v^{S,x}(i,j)$ וסיימנו.

הערה: משפט פלג (בלי הוכחה)

הטענה ההפוכה נכונה גם כן, כלומר: אם $x(N) = v(N)$ ו- $x|_S$ הוא הפתרון הסטנדרטי של $v^{S,x}$ לכל קואליציה של שני שחקנים S אזי x הוא בטרום-גרעין. מכאן כי אם $|N| \geq 3$, אזי x הוא בטרום-גרעין של v אם ורק אם $x(N) = v(N)$ ו- $x|_S$ הוא בטרום-גרעין של $v^{S,x}$ לכל הקואליציות $S \supsetneqq N$.

טענה 4: פתרון הטלית של בעיית הירושה עבור שני אנשים הוא הפתרון הסטנדרטי של המשחק המתאים

ההוכחה נובעת ישירות מן הלמה האחרונה, מן הגדרת משחק הירושה $v_{E;d} := (E - d(N \setminus S))_+$ ומן הידיעה כי פתרון הטלית בין זוג ניתן על ידי $x_i = \frac{E - (E - d_i)_+ - (E - d_j)_+}{2} + (E - d_j)_+$.

28 מקרה המתקיים, לפי תורת המשחקים השיתופיים, כאשר קיים לפחות וקטור תשלום אחד x אשר הוא גם רציונלי (משמע: $x_i \geq v(i)$ לכל i) ויעיל ($x(N) = v(N)$).

טענה 5: הליבה של משחק הירושה $v_{E;d}$ מכילה נקודה אחת והיא הפתרון העקיב-טלית של בעיית הירושה $(E;d)$

<u>הוכחה</u>

נגדיר $v = v_{E;d}$ ויהי x בליבה של v. מהגדרתו v הוא סופר-אדיטיבי (משמע: $S \cap T = \varnothing \Rightarrow v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$) ולכן 0-מונוטוני (משמע: $S \subseteq T \Rightarrow v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T)$). במשחקים 0-מונוטוניים הליבה זהה לטרום-גרעין ומכאן נובע כי x בטרום-גרעין של v.

תהי S קואליציית שני שחקנים. לפי למה 3 $x|_S$ הוא הפתרון הסטנדרטי ולפי טענה 4 $x|_S$ הוא הפתרון העקיב-טלית של $(x(S);d(S))$, אבל משמעות הדבר כי x הוא הפתרון העקיב-טלית של $(E;d)$.

משפט 1 נובע מיידית מטענה 5 משום שהגרעינון מוכל בליבה.[29]

חשוב לציין כי הטענה נוסחה מראש תוך כדי שימוש במושג הגרעינון משום שהוא מוכר יותר מאשר הגרעין ופשוט יותר מבחינה תפישתית. עם זאת, ברור כי הרעיון של עקיבות-טלית קשור קשר הדוק יותר אל מושג הליבה מאשר אל מושג הגרעינון (אשר קשור יותר אל כללים עקיבים-פנימית מאשר כללים עקיבים-טלית).

צוין קודם לכן כי הפתרון העקיב-טלית הוא הפתרון הסטנדרטי של משחק שני שחקים. מכאן כי הכללה נאותה של מושג העקיבות-טלית למשחק שרירותי v הוא וקטור תשלום x כך ש- $x|_S$ הוא הפתרון הסטנדרטי של המשחק המצומצם $v^{S;x}$ עבור כל קואליציית 2 שחקנים S. למה 3, ביחד עם המשפט המוצג כהערה, מראה כי שעם הגדרה זו הקבוצה של כל הפתרונות העקיבים-טלית של משחק v כלשהו הוא בדיוק הטרום-גרעין. כפי שצויין קודם עבור משחקים 0-מונוטוניים, הטרום-גרעין מזדהה עם הליבה.

[29] הגדרת הגרעינון איננה מובאת בנספח זה מאחר ותכונת הגרעינון המצוינת במשפט זה היא התכונה היחידה הרלוונטית לדיוננו