הסיבות לכשלון האינטואיציוניזם כמהפיכה

מגישים: מאיה אדן, 200151876
דרור שמש, 037309747

לכבוד: פרופ' אהוד הרושובסקי

הקדמה

בעבודה זו נדון באינטואיציוניזם, תורה מתמטית שהוצגה בתחילת המאה ובאה לשמש כתחליף למתמטיקה הקלאסית, וננסה לענות על השאלה הבאה: מה היו הגורמים לכשלון האינטואיציוניזם כמהפיכה מתמטית?

נענה על שאלה זו בכמה שלבים. ראשית, נפתח בסקירה היסטורית קצרה של האינטואיציוניזם כזרם מתמטי. לאחר מכן, נציג את האינטואיציוניזם כתורה מתמטית מבחינת היבטיה הפילוסופיים בתוספת מספר דוגמאות להמחשה. לבסוף, ננסה לענות על שאלת המחקר בשני שלבים – ראשית נטען שהאינטואיציוניזם, לפחות מבחינה תיאורטית, היה יכול להוות מהפיכה. כלומר, המרכיבים של תורה מתמטית זו והרעיונות שעומדים מאחוריה היו שונים מהותית מאלה של המתמטיקה הקלאסית והיו מורכבים מספיק כדי לשמש לה תחליף. לבסוף, לאור המסקנה הנ"ל נמנה מספר סיבות אפשריות לכשלונה כמהפיכה שכזו.

ננסה להוכיח שלמרות שהדיון שהתעורר בקרב הקהילייה המתמטית עם הצגת האינטואיציוניזם הוכרע, במידה רבה, לטובת הרעיונות האינטואיציוניסטיים, גישה זו לא אומצה על ידי הקהילייה המתמטית מסיבות רבות, שבחלקן היו לא ענייניות.

מבוא

האינטואיציוניזם היא גישה מתמטית שהוצגה לראשונה בשנת 1908 על-ידי המתמטיקאי הדני Luitzen Egbertus Jan Brouwer (להלן: בראוור). גישה מתמטית זו צמחה על רקע משבר חמור שנוצר ביסודות המתמטיקה בעקבות גילוי פרדוקסים בתורת הקבוצות של קנטור. משבר זה ערער את האמון ביסודות המתמטיקה הקיימת ויצר צורך ליצירת מתמטיקה קונסיסטנטית באופן מוכח. בעוד שרוב המתמטיקאים ניסו לבסס את המתמטיקה הקיימת בצורה שתאפשר את הוכחת הקונסיסטנטיות שלה, טען בראוור כי הרעיונות העומדים בבסיס המתמטיקה הקלאסית אינם נכונים ולכן יש ליצור מתמטיקה חדשה המבוססת על רעיונות "נכונים" יותר.

על אף שמאמרו של בראוור ב-1908 הציג את עיקר הרעיונות האינטואיציוניסטים, האינטואיציוניזם זכה למעט מאוד הכרה בקרב הקהילייה המתמטית בשל סגנונו היבש והקשה להבנה של בראוור. ההתעסקות של הקהילייה המתמטית באינטואיציוניזם החלה רק בשנת 1921 עם פרסום מאמרו של מתמטיקאי כריזמטי שהושפע רבות מהרעיונות של בראוור בשם Hermann Weyl (להלן: וייל). ברוח תקופתו ההיסטורית, מאמרו של וייל היה גדוש בדימויים של מהפיכה ומלחמה. התפיסה של וייל הייתה שהאינטואיציוניזם מהווה מהפכה אמיתית במתמטיקה, כזו שעד מהרה תחליף את המתמטיקה הקלאסית בתור מרכז העיסוק של העולם המתמטי.

מאמר זה פתח, כאמור, דיון נרחב בקרב הקהילייה בנוגע לנכונות רעיונות האינטואיציוניזם. העובדה שדיון כה נרחב התפתח בנושא זה מראה שהמתמטיקאים של התקופה חשו כי יש צורך לדון ביסודות המתמטיקה, מה שמעיד על כך שהיתה קרקע פוריה למהפיכה. בתחילה, רוב המתמטיקאים, ובינהם המתמטיקאי החשוב של התקופה, David Hilbert (להלן: הילברט), הביעו התנגדות חריפה לרעיונות שהציגו וייל ובראוור. אך בחלוף השנים, התרכך מעט הטון משני צידי המתרס, ומשנת 1928 ניכרה ירידה משמעותית בלהיטות דבריהם של התורמים לדיון. תהליך זה הגיע לשיאו בועידת קניסברג שנערכה בשנת 1930, בה שלטה הגישה הפייסנית ובמקום להיאבק זה בזה, הודו המתמטיקאים בחולשותיהם וביתרונותיהם של זרמים אחרים. בשלב זה החל החיפוש אחר סינתזה בין הגישות השונות ולמעשה נגמר המאבק העיקרי בנוגע לנכונות האינטואיציוניזם.

סינתזה זו אכן נמצאה לאחר מספר שנים. משפט גדל (בו נדון בנספח) תיאר את הקשר הפורמלי בין האינטואיציוניזם והמתמטיקה הקלאסית, בצורה שהבהירה כי המתמטיקה הקלאסית והאינטואיציוניזם יכולות (לפחות מבחינה מתמטית, אך לאו דווקא מבחינה פילוסופית) להתקיים זו לצד זו. בנוסף, השיטות המתמטיות של האינטואיציוניזם זכו למימוש כלשהו, בעיקר עם התפתחות תחום האלגוריתמים, שדן בפתירת בעיות באמצעות מחשב.

חשוב להדגיש, שבעוד שהשיטות האינטואיציוניסטיות הוטמעו כתחום במתמטיקה, הדיון הפילוסופי בנוגע לתקפות המתמטיקה הקלאסית הוכרע: כיום רובם המכריע של המתמטיקאים מקבלים את המתמטיקה הקלאסית, וברור שזו לא הוחלפה על ידי המתמטיקה האינטואיציוניסטית כפי שקיוו בראוור ותומכיו.

הפילוסופיה האינטואיציוניסטית

האינטואיציוניזם צמח כאמור על רקע משברים במתמטיקה ועמדה מאחוריו תורה פילוסופית שלמה. לפיכך, על מנת להבין מהו אינטואיציוניזם ננסה בראש ובראשונה להבין את הרעיונות הפילוסופיים העומדים מאחוריו, בתוספת דוגמאות פשוטות. נציג את הנקודות הפילוסופיות העיקריות העומדות מאחוריו ואת ההבדלים העיקריים בין פילוסופיה זו לפילוסופיה שהנחתה את המתמטיקה הקלאסית[1].

הגישה הפילוסופית העומדת מאחורי האינטואיציוניזם הינה הגישה הקונספטואלית, הגורסת כי עצמים אבסטרקטיים קיימים אך ורק אם הם נבנו במוחו של האדם. זאת, בניגוד לגישה האפלטונית העומדת בבסיס המתמטיקה הקלאסית והגורסת כי אובייקט יכול להיות קיים גם מחוץ למוחו של אדם. לפי הגישה האפלטונית אובייקטים כמו פונקציות, קבוצות ועוד הינם אובייקטים הקיימים בעולם ללא כל קשר לאדם, והאדם יכול לכל היותר לגלותם, אך לא ליצור אותם.

לאור הגישה הפילוסופית הזו המתמטיקה האינטואיציוניסטית הינה למעשה אוסף של בניות קונסטרוקטיביות המתרחשות בזו אחר זו. כלומר, האובייקטים המתמטיים, לגישה האינטואיציוניסטית, הינם אך ורק אובייקטים הניתנים לבנייה במוחו של האדם באמצעות מספר סופי של פעולות מנטליות[2]. על בנייה קונסטרוקטיבית כנ"ל להיות אפקטיבית במובן זה שעליה להיות שלמה ומלאה. כלומר, ברגע שאובייקט מסוים נבנה הוא עומד בפנינו כמבנה מנטלי שלם וגמור וניתן לחקור אותו. לפיכך, המתמטיקה האינטואיציוניסטית מוגדרת להיות *הפעילות של בניות מנטליות קונסטרוקטיביות המתרחשות בזו אחר זו*[3].

בראוור גורס כי היכולת לבניה קונסטרוקטיבית נובעת מהמודעות הטבעית של האדם לזמן[4]. מודעות טבעית זו מורכבת ממודעות לרציפות הזמן, יחד עם מודעות לעובדה שהזמן מורכב מרגעים דיסקרטיים הבאים בזה אחר זה, והיא זו המאפשרת לאדם לבצע במוחו, צעד אחר צעד, גרירות לוגיות ובניות קונסטרוקטיביות המובילות לכדי בניית אובייקטים חדשים והוכחת משפטים.

לאור העובדה שמדובר במוחו של אדם ולא בגורם על-טבעי כלשהו, כל בנייה כזו חייבת להיות סופית. לפיכך, משמעותו של משפט כמו: "קיים x כך ש..." שונה לחלוטין במתמטיקה האינטואיציוניסטית לעומת המתמטיקה הקלאסית. לדוגמה, קיומם של אולטרא פילטרים לא ראשיים (מעל הטבעיים) אינו מוטל בספק במתמטיקה הקלאסית, שכן קיימת הוכחת קיום שלהם (הוכחת קיום במובן הקלאסי כמובן). עם זאת, מבחינה אינטואיציוניסטית ההוכחה הנ"ל איננה מוכיחה קיום שכן לא ניתן לבנות בפועל אולטרא פילטר לא ראשי כנ"ל. דוגמה נוספת להבדל כנ"ל הינה ההוכחה הקלאסית של המשפט הבא:

קיימים מספרים אי-רציונליים a,b כך ש- a^b הינו רציונלי.

הוכחה:

נביט על המספר $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. אם הוא רציונלי אז סיימנו (כי $\sqrt{2}$ הינו אי-רציונלי). אחרת, הוא אי-רציונלי, ואז נבחר $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$, ואז: $a^b=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2$ הינו רציונלי.

---

[1] לדיון פורמלי במתמטיקה האינטואיציוניסטית ובהבדלים הפורמליים בינה לבין המתמטיקה הקלאסית ראו נספח.

[2] יצוין שחייב להיות אובייקט בסיסי שממנו מתחילים את כל הבניות. לפי האינטואיציוניסטים יש לכל אדם הבנה טבעית מולדת של המספר הטבעי 1 ושל אופן הבנייה שלו. מכאן, ניתן להמשיך ולבנות את המספרים הטבעיים ואובייקטים נוספים.

[3] [Snapper 1979, p. 210]

[4] הרעיון שלכל אדם קיימת מודעות טבעית לזמן מקורו בפילוסופיה של עמנואל קאנט. למעשה, קאנט השתמש במילה "אינטואיציה" לתיאור מודעות טבעית (immediate awareness) ויש הסוברים כי מכאן מקור השם "אינטואיציוניזם".

הוכחה זו, כפי שקל לראות, הינה תקפה במתמטיקה הקלאסית. עם זאת, מבחינה אינטואיציוניסטית היא איננה תקפה שכן לא בנינו במהלך ההוכחה באופן קונסטרוקטיבי מספרים a,b שעונים על הדרישה.

הגישה הקונספטואלית מובילה בין השאר לאי-הבחנה בין מושג ה"אמת" למושג ה"הוכחה". במתמטיקה הקלאסית קיימת הבחנה בין שני המושגים, שכן בבסיס המתמטיקה הקלאסית עומד הרעיון לפיו כל טענה הינה אמיתית או לא אמיתית, ללא כל קשר האם אנחנו, בני האדם, יודעים את התשובה. לפיכך, איננו חייבים להוכיח משהו כדי שהוא יהיה אמיתי – אמיתות הטענה הינה חיצונית לידיעתו של האדם. באינטואיציוניזם ההבחנה הנ"ל איננה קיימת. מה שנכון, הוא אך ורק מה שהוכח באמצעות תהליך סופי של בנייה קונסטרוקטיבית במוחו של האדם. מכאן נובע, למשל, שנכונות הטענה $A \vee \neg A$ איננה ברורה מאליה. מבחינתו של האינטואיציוניסט, אם אין בידיו הוכחה קונסטרוקטיבית ל-A או לחילופין הוכחה קונסטרוקטיבית ל-$\neg A$ הרי שאין בידיו הוכחה ל-$A \vee \neg A$. מבחינתו, לא קיימת שום אמת חיצונית, שלא ידועה לאדם, שממנה נובעת נכונות הטענה.

לסיכום, הפילוסופיה האינטואיציוניסטית שמה במרכז את העשייה במוחו של האדם. היא איננה רואה במתמטיקה אמת חיצונית קיימת שעלינו לגלותה, אלא תוצאה של פעילות מנטלית קונסטרוקטיבית. לפיכך, היא שונה באופן מהותי מהמתמטיקה הקלאסית, ולא מקבלת חלק מהרעיונות הבסיסיים ביותר שהנחו את המתמטיקה עד תחילת המאה העשרים.

<u>כשלון האינטואיציוניזם כמהפיכה</u>

בפרק זה ננסה לבחון מדוע האינטואיציוניזם לא החליף את המתמטיקה הקלאסית כפי שקיוו בראוור ווייל. על מנת לענות על שאלה זו, יש לבחון תחילה האם האינטואיציוניזם יכל, מראש, להוות מהפיכה בעולם המתמטי, כפי שמכניקת הקוואנטים, למשל, היוותה מהפיכה בעולם הפיזיקה. כלומר, האם באמת האינטואיציוניזם יכול היה להוות תחליף למתמטיקה הקלאסית, במידה והיה מתקבל על ידי הקהילייה המתמטית.
לאחר שנראה שהאינטואיציוניזם יכול היה להיות מהפיכה, נציע סיבות לכשלונו ככזאת.

האם האינטואיציוניזם יכל להוות מהפכה?

ברור לחלוטין שבראוור, ומאוחר יותר וייל ותומכיהם, ראו באינטואיציוניזם תחליף כולל למתמטיקה הקיימת, וכתחליף שכזה ראו בו מהפיכה אמיתית. הדבר ניכר באופן הצגתם את האינטואיציוניזם כתורה מתמטית. המוטיבציה לפיתוח האינטואיציוניזם מבחינתו של בראוור היתה בראש ובראשונה העובדה שלדעתו הרעיונות המתמטיים העומדים בבסיס המתמטיקה הקלאסית אינם נכונים. לפיכך, ברור לחלוטין שמבחינתו של בראוור לפחות, המתמטיקה הקלאסית והמתמטיקה האינטואיציוניסטית לא יכלו לדור בכפיפה אחת. יתר על כן, וייל, במאמרו משנת 1921, אשר פתח את הדיון בקהילייה המתמטית בנושא, אף השתמש במילה "מהפיכה", תוך שהוא מתאר את בראוור כ"מהפכן" המתמטי אשר יפיל את הגישה השלטת.

ראשית, נענה על השאלה מהי מהפיכה מדעית. לשם כך נשתמש בהגדרה של Thomas Kuhn (להלן: קון), כפי שמוצגת במאמרו של Bruce Pourciau[5]. קון מגדיר מהפיכה מדעית כמצב שבו פרדיגמה חדשה מחליפה פרדיגמה ישנה, כאשר מנקודת המבט של הפרדיגמה החדשה נראים חלקים מהפרדיגמה הישנה כלא קוהרנטיים, כבלתי ניתנים להסברה או פשוט כלא נכונים. כלומר, במהפיכה כנ"ל יישות שלטת כלשהי נופלת ומוחלפת על ידי יישות אחרת, באופן שלא ניתן להחזיר את הגלגל לאחור. אין מדובר על יצירה של אובייקטים או תחומים חדשים המתיישבים עם מה שהיה ידוע עד כה, אלא על תחליף שאינו מתיישב, לפחות בחלקו, עם הפרדיגמה שאותה הוא בא להחליף.

לפיכך, על מנת לטעון שהאינטואיציוניזם אכן היווה מהפיכה אפשרית במתמטיקה יש להוכיח שהוא אינו מתיישב עם המתמטיקה הקלאסית. לשם כך, נציג מספר טענות שהינן נכונות במתמטיקה הקלאסית, אך חסרות משמעות או תקפות במתמטיקה האינטואיציוניסטית.

נביט לדוגמה על הטענה הפשוטה הבאה:

בפיתוח העשרוני האינסופי של π, או שהספרה 3 מופיעה מספר סופי של פעמים, או שהיא מופיעה אינסוף פעמים.

(לשם נוחות נסמן טענה זו ב- $Q = P \vee \neg P$, כאשר:
בפיתוח העשרוני האינסופי של π הספרה 3 מופיעה מספר סופי של פעמים = P).

ברור שטענה זאת נכונה במתמטיקה הקלאסית, על-פי עיקרון השלישי הנמנע (להלן: PEM). במתמטיקה האינטואיציוניסטית עקרון זה איננו תמיד נכון (כפי שמוכח בנספח) ולפיכך נכונות הטענה איננה מידית. על מנת להוכיח את הטענה הזאת מבחינה אינטואיציוניסטית יש להציג הוכחה קונסטרוקטיבית ל-P או הוכחה קונסטרוקטיבית ל- $\neg P$ (ולציין איזה משתי הטענות הוכחנו). בהיעדר הוכחה קונסטרוקטיבית כנ"ל, מבחינה אינטואיציוניסטית הטענה איננה נכונה (אך לא בהכרח שגויה). אך במקרה שלנו, חוסר הקוהרנטיות של הטענה באינטואיציוניזם רציני הרבה יותר. עבור אינטואיציוניסט, לא בלבד שהטענה לא נכונה, היא פשוט חסרת משמעות. זאת, מכיוון שאפילו אבן היסוד הבסיסית שלה, כלומר P, אינה יכולה להיחשב כטענה מבחינה אינטואיציוניסטית. הטענה P כוללת התייחסות לפיתוח העשרוני האינסופי של π, בעוד שזה איננו

[5] [2000, p. 297-329]

אובייקט שניתן לבנות אותו באופן קונסטרוקטיבי במוחו של האדם, מכיוון שבנייה כנ"ל תדרוש מספר אינסופי של צעדים, ולכן לא נחשב כלל לאובייקט מתמטי באינטואיציוניזם. לפיכך, טענה זו שהינה לגיטימית ואף נכונה במתמטיקה הקלאסית, הינה גיבוב חסר משמעות של מילים מבחינת האינטואיציוניזם.

קל לראות שטענות מסוג זה, שקיימות בהמוניהן במתמטיקה הקלאסית, יאבדו משמעות או יהיו לא מוכחות במתמטיקה האינטואיציוניסטית (דוגמאות נוספות ניתן למצוא במאמרו של Bruce Pourciau). כלומר, במידה והאינטואיציוניזם היה מתקבל על ידי הקהילייה המתמטית, חלקים גדולים מהמתמטיקה הקלאסית היו נחשבים כלא מוכחים במקרה הטוב וכלא רלוונטיים במקרה הרע.

מאפיין מהפכני נוסף של האינטואיציוניזם הינו שינוי מוקד הדיון המתמטי. שאלות רבות במתמטיקה הקלאסית שהיוו, ועדיין מהוות, מוקד לדיון נרחב, כגון השערת הרצף, אקסיומת הבחירה ועוד, יהפכו להיות לא רלוונטיות עבור האינטואיציוניסט[6]. מצד שני, שאלות רבות שלא הטרידו כלל מתמטיקאיים קלאסיים, כדוגמת השאלה האם כל פונקציה ממשית (הניתנת לבנייה קונסטרוקטיבית) הינה רציפה, היו במוקד הדיון בתחילת דרכו של האינטואיציוניזם[7].

כלומר, ניתן לראות שהאינטואיציוניזם יכול להיחשב כמהפיכה פוטנציאלית במובן זה שבמידה והיה מתקבל, המתמטיקה היתה משנה את פניה לחלוטין באופן בלתי הפיך, כפי שדורש קון.

לסיום חלק זה, נציין שתי נקודות נוספות. ראשית, לאור משפט גדל (המוצג בנספח א') עלולה להיווצר התחושה שההבדל בין המתמטיקה הקלאסית למתמטיקה האינטואיציוניסטית הינו סמנטי בלבד, שכן מסקנה מיידית ממשפט זה היא שלכל טענה נכונה קלאסית A, הטענה $\neg\neg A$ נכונה אינטואיציוניסטית, ולכן הצגת האינטואיציוניזם כמהפיכה הינה מרחיקת לכת. עם זאת, מנקודת מבט אינטואיציוניסטית הבדל זה הינו מאד עקרוני שכן אינטואיציוניסט לא מתעניין בשאלה האם $\neg\neg A$ נכון, אלא בשאלה האם A נכון. כלומר, מבחינתו העובדה ש- $\neg\neg A$ הוכח איננה מעניינת כלל. לכן, הבדל זה מייצג מחלוקת פילוסופית עמוקה בין שני הזרמים ואין לראותו כהבדל סמנטי גרידא.

שנית, יש לציין שהראייה המהפכנית של האינטואיציוניזם מתבססת על כך שמבחינה פילוסופית לא יתכן שהן המתמטיקה הקלאסית והן המתמטיקה האינטואיציוניסטית נכונות. הרעיונות הפילוסופיים שעומדים בבסיס המתמטיקה הקלאסית שונים לחלוטין מאלה העומדים בבסיס האינטואיציוניזם, ולא יתכן שאדם יקבל את שתי הגישות יחדיו. עם זאת, היום היחס לנושא זה הינו פורמלי לחלוטין (כפי שיפורט בהמשך) ולכן בעיה זו איננה מתעוררת. כלומר, בדומה לכך שהגיאומטריה האוקלידית והגיאומטריה ההיפרבולית אינן מתיישבות זו עם זו, אך ישנה הכרה של המתמטיקאיים ששתיהן גיאומטריות תקפות המבוססות על מערכת פורמלית שונה של אקסיומות, כך קיימת הכרה היום שהן המתמטיקה האינטואיציוניסטית והן המתמטיקה הקלאסית הינן מתמטיקות תקפות המבוססות על מערכת שונה של אקסיומות. לכן, העובדה שהיום המתמטיקה הקלאסית והאינטואיציוניסטית חיות זו לצד זו אינה עומדת בסתירה לטענה שבמידה והמתמטיקה האינטואיציוניסטית *היתה מחליפה* את המתמטיקה הקלאסית, הדבר היה בבחינת מהפיכה אמיתית במתמטיקה.

מדוע לא הצליח האינטואיציוניזם כמהפיכה?

כפי שכבר צוין, וברור לכל, האינטואיציוניזם לא הצליח להחליף את המתמטיקה הקלאסית. על אף שהמתמטיקה הקלאסית עברה תהליך של פורמליזם כתוצאה מהצגת האינטואיציוניזם לעולם, הרעיונות הבסיסיים המובילים את המתמטיקה כיום הם רעיונות המתמטיקה הקלאסית.

[6]מאקסיומת הבחירה למשל ניתן להוכיח את נכונות PEM, ולכן האינטאוציוניסטים, רובם ככולם לא קיבלו אותה כאקסיומה תקפה. מטעמים מורכבים שלא יפורטו כאן, טען בראוור שהסודר הלא בן מניה הראשון איננו קיים ולכן גם השערת הרצף נטולת משמעות.

[7]למעשה בראוור עצמו הקדיש שנים רבות בנסיון להוכיח טענה זו.

לפיכך, עולה באופן טבעי השאלה מה מנע מהאינטואיציוניזם להחליף את המתמטיקה הקלאסית. סיבה ראשונה אפשרית, אותה פסלנו זה עתה, היא שהאינטואיציוניזם לא היה בעל אופי מהפכני ולכן לא יכל מלכתחילה להוות מהפיכה. לפיכך, ננסה עתה לבחון סיבות אפשריות נוספות.

לאור העובדה שהאינטואיציוניזם תקף את יסודות המתמטיקה כפי שהיו קיימים באותה תקופה, התפתח דיון בקרב הקהילייה המתמטית לגבי נכונות הטענות שהציג האינטואיציוניזם. יהיה זה טבעי לחשוב שגורל האינטואיציוניזם כמהפיכה הוכרע בדיון זה. על מנת לבחון תיאוריה זו, נסקור בקצרה את מהלך הדיון.

הדיון החל, כאמור, עם פרסום מאמרו של ווייל בנושא האינטואיציוניזם בשנת 1921. מאמר זה נכתב "על מנת לעורר את הישנים", תוך שהוא מעורר אסוציאציות עם המהפיכה הקומוניסטית[8], והשיג מטרה זו. מאמר זה גרר מיד תגובות נרחבות בקרב הקהילייה המתמטית. בראש המגיבים עמד הילברט, המתמטיקאי החשוב של התקופה, שתקף בחריפות את הרעיונות שהציג ווייל במאמרו. הילברט השתמש במטאפורות פוליטיות רבות על מנת לתקוף את האינטואיציוניזם ואף השתמש במילה Putch לתיאורה. מכאן והלאה נסב הדיון סביב שתי נקודות עיקריות – השאלה מהו *קיום מתמטי* ושאלת נכונות עקרון ה-PEM. כלומר, הדיון נסב בעיקר סביב הבעיות שהציג ווייל במתמטיקה הקלאסית וכמעט בכלל לא סביב הפתרונות שהציע לבעיות אלה. בהקשר זה, עלתה פעמים רבות הטענה שהאינטואיציוניזם, אם יאומץ, יהווה קטסטרופה עבור המתמטיקה. הקהילייה המתמטית ראתה בו בעיקר איום ולא הזדמנות לפתרון המשבר.

עיקר הדיון בשאלת הקיום המתמטי נסב סביב הבהרת מושגים, כאשר המתמטיקאים ניסו להבהיר מה משמעותה של המילה "קיום" במתמטיקה, לעיתים אף מבלי לנקוט עמדה כזו או אחרת. על אף שהוצע לדיון זה פתרון טרמינולוגי ב-1926 על ידי דינגלר (Dingler), שהציע להגדיר פשוט שני מושגי קיום נפרדים, פתרון זה לא אומץ על ידי הקהילייה המתמטית באופן מיידי. רבים בקהילייה החזיקו בראייה אפלטונית וראו את הקיום המתמטי כקיום אמיתי, על אף שמעטים מהם העזו להגן על עמדה זו בפומבי. לבסוף, אומצה עמדתו של ווייל מ-1924, שהיה אף הוא בעיקרו טרמינולוגי, לפיה קיום קלאסי משמעותו קונסיסטנטיות בלבד (ולא קיום באיזשהו מובן עמוק יותר), ואילו קיום אינטואיציוניסטי הוא בעל משמעות גדולה יותר.

בשאלת תקפות עקרון ה-PEM ספגה בתחילה גישתו של בראוור ביקורת חריפה יותר. ביקורת זו נבעה בעיקר מטעמים פילוסופיים או אמוציונליים, ופחות מטיעונים לוגיים או מתמטיים. התורמים הקלאסיים לדיון עמדו בגלוי מאחורי הגישה האפלטונית, לפיה כל דבר הוא נכון או לא נכון, בין אם אנחנו יודעים את התשובה או לא. עמדה זו נבעה מהתחושה שהלוגיקה מייצגת איזושהי אמת החיצונית למוחו של האדם ואיננה מערכת פורמלית גרידא.

לאחר הזעזוע הראשוני, החל להבין הילברט כי אכן יש בעייתיות מסוימת בשימוש ב-PEM במבנים אינסופיים. המפנה הגדול הגיע בשנת 1925, אז נשא הילברט נאום בנושא האינסוף במינסטר. בנאום זה אמר הילברט מספר דברים שלמעשה עולים בקנה אחד עם דבריהם של האינטואיציוניסטים. למשל, טען הילברט שלעולם לא נוכל לשלול טענות מסוימות הנוגעות לכמות אינסופית של אלמנטים ולפיכך עקרון ה-PEM לא בהכרח נכון במקרים הללו. הילברט כינה את המקרים הבעייתיים הללו finitary והודה שחוקי הלוגיקה של אריסטו לא תקפים עבורם. בהקשר זה אמר:

Now one could try to develop the logical laws which hold for the domain of finitary statements. But it would do us no good, for we do not want to give up the use of the simple laws of Aristotelian logic. No one, though he speaks with the tongues of angels, would keep people from negating arbitrary statements, or from forming partial propositions, or from using the tertium non datur (PEM). How, then, are we to behave? Let us remember that we are mathematicians and that as such we have often been in a

---

[8] [Hesseling, 2003, p.313]

similarly precarious situation from which we have been rescued by the ingenious methods of ideal elements.[9]

ובהמשך פתרונו של הילברט הינו:
Supplementing the finitary statements with ideal statements, to preserve the simple formal rules of ordinary Aristotelian logic.[10]

כלומר, הילברט לא אימץ את האינטואיציוניזם כפתרון לבעיה זו, אלא הציע פתרון פורמלי באמצעות הוספת אלמנטים חסרי משמעות עבור המקרים האינסופיים, במטרה לבסס את המתמטיקה הקלאסית באופן פורמלי ולהוכיח את הקונסיסטנטיות שלה. בחלוף השנים, אומצה הגישה הפורמליסטית, הן על ידי מתמטיקאים קלאסיים רבים והן על ידי וייל. לפי גישה זו, עקרון ה-PEM נכון תמיד במתמטיקה הקלאסית ואיננו נכון במתמטיקה האינטואיציוניסטית פשוט משום שכך הוגדרו הדברים.

כפי שניתן לראות, הדיון בנושא האינטואיציוניזם לא הסתיים בדחייה של האינטואיציוניזם כתורה מתמטית. אדרבא, רבים מרעיונות האינטואיציוניזם אומצו בסופו של דבר על ידי מתמטיקאים רבים. כפי שהוצג, שתי נקודות הדיון העיקריות הוכרעו במידה כזו או אחרת לטובת האינטואיציוניזם – רוב המתמטיקאים קיבלו את הטענה לפיה קיום קונסטרוקטיבי הינו קיום חזק יותר ואת הטענה שעקרון ה-PEM הינו בעייתי. לפיכך, שאלת המחקר רק מתחזקת – כיצד יתכן שלמרות זאת הגישה האינטואיציוניסטית אומצה על ידי מספר קטן מאד של מתמטיקאים ולא הצליחה להשתלט כמהפיכה, או לכל הפחות כזרם משמעותי מאד במתמטיקה?

התשובה, להערכתנו, מורכבת ממכלול של סיבות שונות. ראשית, כפי שכבר צוין, הדיון התמקד ב"חצי הכוס הריקה" מבחינת האינטואיציוניסטים. כלומר, במקום שהדיון יעסוק הן בבעיות של המתמטיקה הקלאסית והן בפתרונות שהוצעו על ידי האינטואיציוניסטיים, עסק הדיון רק בחלק הראשון. לפיכך, האינטואיציוניזם נתפס על ידי רוב המתמטיקאים כזרם המאיים למוטט את כל הישגי המתמטיקה. עדות לכך ניתן לראות בתגובות האמוציונליות החריפות נגד האינטואיציוניזם בתחילת דרכו. תגובות אלו מעידות בעיקר על הפחד שחשו המתמטיקאים הנ"ל מאובדן המתמטיקה הקיימת. מצד שני, האינטואיציוניסטים לא השכילו להסב את הדיון לכיוון הרצוי מבחינתם.

אופן הצגת האינטואיציוניזם על ידי בראוור וחבריו תרם רבות לצורה בה היא נתפסה על ידי הקהילייה המתמטית. בראוור הציג את רעיונותיו באופן לא קוהרנטי והקדיש שנים רבות להוכחת טענות אינטואיציוניסטיות שלא תרמו להבנת היתרונות של האינטואיציוניזם. הוא התמקד בהצדקת הרעיונות הפילוסופיים העומדים מאחורי האינטואיציוניזם, אשר נראו מטה-פיסיים, סוביקטיביים ובלתי טבעיים למתמטיקאים הקלאסיים. במקום להתעלם ממספר בעיות שהטרידו אותו ולפתח בסיס למתמטיקה אינטואיציוניסטית, הוא התמקד בפיתוח המספרים הטבעיים ובהוכחת משפטים איזוטריים. בסיס מתמטי שכזה היה מוכיח לקהילייה המתמטית שניתן לפתח מתמטיקה אינטואיציוניסטית בעלת יכולת[11], ויתכן שהיה ממתן את תחושת האיום שחשו. גם וייל ואחרים, למרות שהציגו את רעיונותיהם באופן קוהרנטי יותר מבראוור, נגררו לעיסוק בצד הנגטיבי של האינטואיציוניזם ולא השכילו להדגיש את יתרונותיו.

בנוסף לסיבות הנ"ל, ישנה הסיבה הפרקטית. רבים מהמתמטיקאים פשוט לא הסכימו לוותר על המשפטים הרבים שהוכחו באמצעות עקרונות המתמטיקה הקלאסית. כפי שצוין, משפטים רבים הופכים להיות חסרי

---

[9] [Hesseling 2003, p. 216-217]

[10] [Hesseling 2003, p.217]

[11] בסיס מתמטי שכזה אכן פותח מאוחר יותר. ראשית, על ידי קולמוגורוב בשנת 1925 (אך לא זכה כמעט להכרה מכיוון שנכתב ברוסית) ובהמשך בתחילת שנות ה-30 על ידי פרנקל, הייטינג וגדל. הגדיל לעשות המתמטיקאי ארט בישופ בספרו Constructive Analysis משנת 1967, בה פיתח אנליזה מתמטית שלמה בהתבסס על רעיונות אינטואיציוניסטיים והוכיח שהחשש מפני עיקור המתמטיקה מיכולותיה לא היה מוצדק.

משמעות במתמטיקה האינטואיציוניסטית, בינהם משפטים שימושיים מאד כגון משפט קנטור-ברנשטיין, משפט נקודת השבת של בראוור (באופן אירוני) ומשפטים נוספים. בנוסף, אפילו משפטים שנשארים תקפים במתמטיקה האינטואיציוניסטית דורשים פעמים רבות הוכחות ארוכות ומסובכות יותר ומאבדות מהחן והאלגנטיות שלהן. עדות ברורה לכך שהסיבה הפרקטית היתה גורם משמעותי ניתן לראות בנאומו של הילברט משנת 1925 שצוטט למעלה. בנאום זה מציע הילברט להוסיף אלמנטים חסרי משמעות למתמטיקה, על מנת להצדיק את השימוש בעקרון ה-PEM גם במקרים האינסופיים. הילברט אף מודה כי הסיבה לכך היא שהיינו רוצים לשמור על הלוגיקה הקלאסית ולא לאבד את הישגיה. בהמשך גם טען Wavre כי הסיבה היחידה שהפורמליסטים רצו להוסיף את האלמנטים הנ"ל היתה להצדיק את הישגי המתמטיקה הקלאסית.

לסיכום, נראה שהסיבות שהכריעו את האינטואיציוניזם אינן מתמטיות אלא פרקטיות. ככל מהפיכה מדעית, קשה לקהילייה המדעית לוותר על הישגיה עד כה ולהחליפם לטובת גישה אחרת. בנוסף לצירי הלידה שיש לכל מהפיכה, האינטואיציוניזם סבל גם מייצוג בעייתי. עם זאת, נוצר בסופו של דבר מצב אבסורדי, שבו רוב המתמטיקאים קיבלו מצד אחד את הרעיונות העומדים בבסיס האינטואיציוניזם (לפחות באופן חלקי), אך מצד שני עדיין לא היו מוכנים לוותר על המתמטיקה הקלאסית. הפתרון שנמצא אם כן, היווה מעין "בריחה מהמציאות". אם בתחילת הדרך, הצדיקו המתמטיקאים הקלאסיים את נכונות המתמטיקה הקלאסית באמצעות הטיעון שהמתמטיקה מייצגת אמת חיצונית כלשהי ולכן האקסיומות שלה נכונות מעצם היותן הגיוניות וטבעיות, הרי שבסופו של דבר הם ויתרו על טיעון זה, כאשר ראו שהוא קשה להצדקה. במקום זאת, הם פנו לפתרון פורמליסטי, אשר על פניו מנשל את המתמטיקה מהאמת הפילוסופית שלה. הפורמליזם אכן היווה פתרון טוב מבחינת המתמטיקאים, מהבחינה הזאת שהוא עיקר את המאבק בין האינטואיציוניסטים למתמטיקאים הקלאסיים מתוכנו. עם זאת, הפתרון הפורמליסטי למעשה טומן בחובו את התפיסה לפיה אין למתמטיקה שום אמת פילוסופית ושהיא בסך הכל מערכת פורמלית שהקשר שלה למציאות מוטל בספק. הכותבים חשים שזוהי אינה אלא בריחה מהמציאות. כיצד יתכן שהמתמטיקאים המשיכו לפתח מתמטיקה קלאסית נרחבת, בעוד שהם מאמינים באמת ובתמים שזו חסרת משמעות? קשה להאמין שרבים המתמטיקאים, כולל אלה שאימצו באופן מלא את הפתרון הפורמליסטי, אשר האמינו ברעיון הפילוסופי העומד מאחוריו.

נסיים בדבריו של פון-ניומן:

Only very few mathematicians were willing to accept the new, exigent standards for their own daily use. Very many, however, admitted that Weyl and Brouwer were prima facie right, but they themselves continued to trespass, that is, to do their own mathematics, in the old, 'easy' fashion – probably in the hope that somebody else, at some other time, might find the answer to the intuitionistic critique and thereby justify then a posteriori[12].

[Hesseling 2003, p.313][12]

סיכום

בעבודה זו ניסינו לבחון מדוע לא התקבלה המתמטיקה האינטואיציוניסטית כתחליף למתמטיקה הקלאסית. ראשית, הצגנו את האינטואיציוניזם כתורה מתמטית ורק לאחר מכן עברנו לדון בשאלת המחקר עצמה. כפי שהראינו בפרק האחרון, האינטואיציוניזם אכן יכול היה, לפחות באופן תיאורטי, להחליף את המתמטיקה הקלאסית ולהוות מהפיכה (קוניאנית) בעולם המתמטיקה. זאת מכיוון שאימוץ האינטואיציוניזם במלואו, כתחליף למתמטיקה הקיימת, היה משנה לחלוטין את המתמטיקה. שינוי זה היה בא לידי ביטוי בכל התחומים – בנכונותם של משפטים, ביכולת לטעון טענות כאלו או אחרות, בשיטות ההוכחה, באובייקטים המתימטיים התקפים ועוד.

לאחר שהגענו למסקנה הנ"ל, ניסינו לבחון אם כן מדוע לא השתלט האינטואיציוניזם על עולם המתמטיקה. כפי שהראינו, הדיון בנושא זה היה בתחילה יותר אמוציונלי ופולמוסי ופחות ענייני. עם זאת, עם הזמן התרככו הצדדים והחלו להתעסק בצד הענייני יותר של הויכוח. הכרעת הדיון נטתה לכיוון האינטואיציוניסטי, אך עם זאת גישה זו כמעט ולא אומצה על ידי המתמטיקאים. ניתן לחלק את הסיבות לכך לשלוש:

1. הפחד של המתמטיקאים לאבד את כל מה שהושג עד כה.
2. אופן הצגת האינטואיציוניזם על ידי בראוור ותומכיו, שחיזק את הפחד הנ"ל
3. היעדר אופק מתמטי.

המסקנה העיקרית של עבודה זו היא שהפתרון שנמצא בזמנו, בדמות הפרדת שתי הגישות באמצעות פורמליזם, נבע, לפחות בחלקו, מסיבות לא ענייניות וטאטא את הבעיה האמיתית מתחת לשטיח.

יש לציין, שגם כיום משמש פתרון זה את הקהילייה המתמטית. במקביל לעיסוק הגורף במתמטיקה הקלאסית, תוך שימוש בלתי מוגבל בעקרון ה-PEM, קיים הזרם הקונסטרוקטיבי. זרם זה התפתח מאד עם התפתחות עולם המחשבים, בדמות תורת האלגוריתמים[13]. קשה לקבוע האם תורת האלגוריתמים הינה המשך ישיר של האינטואיציוניזם, או לחילופין התפתחות מאוחרת ובלתי תלויה שנבעה מתוך צורך אחר. נושא זה יכול להוות שאלה מעניינת למחקר נוסף.

---

[13] למעשה, למרות שעם הצגת האינטואיציוניזם התקיים דיון נרחב על קונסטרוקטיביזם, ונעשה שימוש רב במונח הנ"ל, הגדרה פורמלית של המונח הגיעה רק בשנת 1935 כאשר הציג טיורינג את המודל שלו לחישוב קונסטרוקטיבי.

רשימת מקורות

1. Hesseling, David E.
Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s.
Basel, Boston, Berlin: Birkhu-ser Verlag, 2003.

2. Pourciau, Bruce.
Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics.
Stud. His. Phil. Sci, Vol. 31, No. 2 (2000), p. 297-329

3. Snapper, Ernst.
The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism.
Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 4 (Sep., 1979), p. 207-216.

4. Streicher, Thomas.
Introduction to Constructive Logic and Mathematics.
2000-2001, Electronic document, Accessed august 5th,
http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/CLM/clm.ps.gz

נספח – הצגה פורמלית של האינטואיציוניזם

בשנות ה-20 של המאה הקודמת התקיים ויכוח לגבי נכונותה של המתמטיקה האינטואיציוניסטית בין המתמטיקאים הקלאסיים לבין תומכיה של הגישה האינטואיציוניסטית. חלקים ניכרים מויכוח זה, כפי שהוצגו בעבודה, עסקו בהבהרת מושגים והגדרה פורמלית של האינטואיציוניזם. בחלוף השנים התעסקו מספר מתמטיקאיים, ובראשם הייטינג וגדל, בהגדרה פורמלית כזו, והעמידו לרשותנו כלים שלא עמדו לרשות המתמטיקאיים בתחילת המאה להבנת האינטואיציוניזם באופן פורמלי. על אף שהדיון והמסקנות שנציג הן אנכרוניסטיות במידה מסויימת, ניתוח זה מאפשר לנו להבין בצורה טובה את משמעותו של האינטואיציוניזם וקשרי הגומלין בינו לבין המתמטיקה הקלאסית. אנו נתמקד בהצגת מערכת פורמלית ללוגיקה האינטואיציוניסטית על סמך עבודתם של הייטינג וגדל, כפי שמוצגת בספר הלימוד:
Introduction to Constructive Logic and Mathematics / Thomas Streicher[14].

כפי שכבר צוין, אחת התוצאות המוכרות והמשמעותיות ביותר של המתמטיקה האינטואיציוניסטית היא העובדה שעקרון השלישי הנמנע (להלן: PEM – Principle of Excluded Middle), לפיו לכל טענה A הפסוק $A \vee \neg A$ הינו תמיד נכון, איננו עקרון נכון. כלומר, יש לבחון כל טענה A לגופה ולהכריע האם ניתן להוכיח באופן קונסטרוקטיבי את הפסוק $A \vee \neg A$. באופן שקול[15], עקרון ה-RAA (reductio ad absurdum), לפיו לכל טענה A הטענה $\neg\neg A \to A$ נכונה, גם מוטל בספק באינטואיציוניזם. נבנה מערכת פורמלית שבאמצעותה נוכיח שעקרונות אלה אינם תמיד נכונים באינטואיציוניזם.

על פניו לא ברור מה ההגדרה של הוכחה שהינה תקפה מבחינה קונסטרוקטיבית. במתמטיקה הקלאסית, משתמשים בערכי אמת המגדירים את נכונותו של פסוק באופן אינדוקטיבי, באמצעות ערכי האמת של הפסוקים המרכיבים אותו. אבל ברור שלא ניתן להשתמש באותה סמנטיקה של ערכי אמת עבור המתמטיקה האינטואיציוניסטית, שכן לפי הסמנטיקה הנ"ל עקרון ה-PEM נכון.

אנו נציג 2 גישות להגדרה פורמלית של הוכחה תקפה באינטואיציוניזם. הראשונה לא עושה שימוש בערכי אמת והינה אינטואיטיבית יותר ובעלת קשר ברור יותר לפילוסופיה האינטואיציוניסטית. השניה, לעומת זאת, כן עושה שימוש בערכי אמת, אך הקשר בינה לבין הפילוסופיה אינו מיידי. שימוש בשתי הגישות גם יחד, והקשר בינהן, יוביל אותנו להבנה הנדרשת.

הגישה הראשונה עושה שימוש במונח הלא פורמלי "הוכחה" במקום במונח הלא פורמלי "ערכי אמת". אין להבין את המונח "הוכחה" בהקשר זה כהוכחה פורמלית קלאסית (עצי בנייה וכו') אלא כמונח בסיסי בלתי פורמלי. פירוש אינטואיטיבי זה של מושג ה"הוכחה" הינו הפירוש של Brouwer-Heyting-Kolmogorov ועל כן נקרא BHK. מבחינה אינטואיטיבית בלתי פורמלית נאמר כי:

- הוכחה ל- $A \wedge B$ היא זוג <p,q>, כאשר p הוכחה ל-A ו-q הוכחה ל-B.
- הוכחה ל- $A \vee B$ היא הוכחה ל-A או הוכחה ל-B תוך ציון איזה מהם הוכח.
- הוכחה ל- $A \to B$ היא פונקציה הניתנת לבנייה באופן קונסטרוקטיבי (להלן: פונקציה קונסטרוקטיבית) f הממפה כל הוכחה p ל-A להוכחה f(p) ל-B.
- אין הוכחה ל- $\perp$[16].

---

[14] מפאת חוסר מקום, ההצגה הפורמלית תהיה מאד מצומצמת ולא מקיפה, ומטרתה רק לתת תחושה של מעט התעסקות באינטואיציוניזם. לפרטים נוספים יש לגשת לספר המוזכר או לספרים אחרים בנושא.

[15] קל להוכיח בלוגיקה קלאסית את שקילות עקרונות ה-RAA וה-PEM.

[16] בדומה ללוגיקה הקלאסית, גם באינטואיציוניזם הסימן $\neg A$ מפורש כ- $A \to \perp$.

- הוכחה ל-$\forall x A(x)$ הינה פונקציה קונסטרוקטיבית f, כך ש-f(d) הינה הוכחה ל-A(d) לכל $d \in D$, כאשר D הוא העולם של המבנה.
- הוכחה ל-$\exists x A(x)$ היא זוג <d,p> כאשר $d \in D$ ו-p הינה הוכחה ל-A(d).

מתוך ההגדרות הנ"ל נבנתה מערכת כללי ההיסק שאומצה על ידי המתמטיקאים האינטואיציוניסטיים. להלן מערכת הכללים הנ"ל אשר נוסחה על ידי המתמטיקאי Gentzen בשנות ה-30:

Structural Rules

$$\frac{}{\Gamma, A, \Delta \vdash A}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\ (\mathrm{ex})$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ (\mathrm{w}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ (\mathrm{c})$$

Propositional Connectives

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i}\ (\wedge E_i)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2}\ (\vee I_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}\ (\bot E)$$

Quantifiers

$$\frac{\Gamma \vdash A(x) \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\ (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}\ (\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.A(x) \quad \Gamma, A(x) \vdash C \quad x \notin FV(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash C}\ (\exists E)$$

◊

מערכת זו הינה, כאמור, בעלת קשר ישיר וברור לפילוסופיה האינטואיציוניסטית ולפירוש האינטואיטיבי שניתן למעלה. למשל, כלל ההיסק $(\wedge I)$ מציג את הרעיון שהוכחה ל-$A \wedge B$ היא הוכחה ל-A וגם הוכחה ל-B.

נציג שתי דוגמאות לשימוש בכללי ההיסק הנ"ל, המוכיחות טענות בסיסית באינטואיציוניזם:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,\neg A\vdash\neg A}\,(\mathrm{ax})\qquad\dfrac{}{A,\neg A\vdash A}\,(\mathrm{ax})}{A,\neg A\vdash\bot}\,(\to E)}{A\vdash\neg\neg A}\,(\to I)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg A, A\vdash\neg\neg\neg A}\,(\mathrm{ax})\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A,\neg A\vdash\neg A}\,(\mathrm{ax})\qquad\dfrac{}{A,\neg A\vdash A}\,(\mathrm{ax})}{A,\neg A\vdash\bot}\,(\to E)}{\neg\neg\neg A, A,\neg A\vdash\bot}\,(\mathrm{w})}{\neg\neg\neg A, A\vdash\neg\neg A}\,(\to I)}{\neg\neg\neg A, A\vdash\bot}\,(\to E)}{\neg\neg\neg A\vdash\neg A}\,(\to I)$$

מהדוגמה הראשונה קל להסיק את הטענה: $A \to \neg\neg A$, ויחד עם הדוגמה השנייה נסיק את הטענה: $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$. עם זאת, כפי שכבר ציינו (וכפי שנוכיח בהמשך) הטענה $\neg\neg A \leftrightarrow A$ איננה נכונה באינטואיציוניזם.

עתה נעבור לגישה השנייה העושה שימוש בערכי אמת. ראשית, נגדיר מספר הגדרות:

- תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית, בה לכל תת קבוצה סופית יש אינפימום וסופרימום. נגדיר לכל $a,b \in A$: $a \wedge b = \inf(a,b)$, $a \vee b = \sup(a,b)$.
- אלגברת הייטינג הינה קבוצה סדורה חלקית $(A,\leq)$ בעלת איבר מינימלי $\bot$ (שיפורש בהמשך בתור סתירה), בה לכל תת קבוצה סופית יש אינפימום וסופרימום וכן לכל $a,b \in A$ קיים איבר $a \to b \in A$ כך שלכל $c \in A$ מתקיים $c \leq a \to b$ אמ"ם $c \wedge a \leq b$.

נציין כי ניתן להראות שבאלגברת הייטינג כנ"ל, האיבר $a \to b \in A$ מוגדר באופן יחיד לכל $a,b \in A$. כמו כן, קיומו של איבר מקסימלי (שיפורש בהמשך בתור ערך אמת, T) מובטח שכן לכל $c \in A$ מתקיים $c \wedge \bot \leq \bot$ ולכן $c \leq \bot \to \bot$.

- תהי A אלגברת הייטינג. פונקציה ρ מקבוצת הפסוקים היסודיים ל-A נקראת השמה. השמה כזו מגדירה למעשה התאמה בין קבוצת הפסוקים ל-A על פי הכללים הבאים:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![p]\!]\rho & = & \rho(p) \\
[\![A \wedge B]\!]\rho & = & [\![A]\!]\rho \wedge_A [\![B]\!]\rho \\
[\![A \vee B]\!]\rho & = & [\![A]\!]\rho \vee_A [\![B]\!]\rho \\
[\![A \to B]\!]\rho & = & [\![A]\!]\rho \to_A [\![B]\!]\rho \\
[\![\bot]\!]\rho & = & \bot_A
\end{array}
$$

דוגמה לאלגברת הייטינג:

תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית, אזי $dcl(A) := \{B \in P(A) \mid y \leq x \in B \Rightarrow y \in B\}$ הסדורה חלקית באמצעות יחס ההכלה מהווה אלגברת הייטינג. בדוגמה זו, הפעולה $\to$ מקיימת:

$U \to V = \{\downarrow a \in A \mid U \cap \downarrow a \subseteq V\}$, כאשר $\downarrow a := \{b \in A \mid b \leq a\}$.

הקשר בין BHK לבין אלגבראות הייטינג ניתן על ידי הטענה הפשוטה הבאה (שלא תוכח):

אם $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ לפי BHK אזי לכל אלגברת הייטינג והשמה ρ מתקיים

$$[\![A_1]\!]\rho \wedge_A \ldots \wedge_A [\![A_1]\!]\rho \leq_A [\![B]\!]\rho$$

(נשים לב שמהטענה נובע בפרט כי $\vdash$ B אמ"ם $\|B\|\rho = T$)

נשתמש בטענה זו כדי להוכיח שהעקרונות PEM ו-RAA אינם תמיד נכונים באינטואיציוניזם:

תהי A אלגברת הייטינג dcl(2), כאשר 2 היא הקבוצה {0,1} עם יחס הסדר הטבעי. נסמן: u={0}. אזי מכאן נסיק כי:

- $\|\neg u\|\rho = \bot$ שכן $\{0\} \cap \downarrow i \not\subset \phi$ עבור i=0,1, ולכן $\|u \to \bot\|\rho = \phi$.
- $\|\neg\neg u\|\rho = T$ שכן $\|\neg u\|\rho = \bot$ והראינו כי $\bot \to \bot = T$.

לפיכך, $\|\neg\neg u \to u\|\rho \not\ni 1$ שכן $\|u\|\rho = \{0\} \not\subset \{0,1\} \cap \{0,1\} = \|\neg\neg u\|\rho \cap \downarrow 1$. כלומר,

$$\|\neg\neg u \to u\|\rho < T$$

ובהסתמך על המשפט הקודם $\nvdash$ RAA.

בנוסף, $\|u \vee \neg u\|\rho = \|u \vee \bot\|\rho = \|u\|\rho < T$ ושוב בהסתמך על המשפט הקודם נקבל $\nvdash$PEM.

כלומר, הראינו שקיימת אלגברת הייטינג בה PEM ו-RAA אינם מקבלים ערך T, ולכן לא ניתן להוכיח את העקרונות הללו במערכת הפורמלית BHK.

לסיום, נצטט את משפט גדל שהינו פועל יוצא של המשפט שזה עתה הוכח:

הטענה $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ נכונה בלוגיקה קלאסית, אם ורק אם הטענה $A_1^G, \ldots, A_n^G \vdash B^G$ נכונה בלוגיקה קונסטרוקטיבית, כאשר נגדיר באופן אינדוקטיבי את היחס $(-)^G$ באופן הבא:

$$
\begin{array}{lcll}
\bot^G & \equiv & \bot & \\
P^G & \equiv & \neg\neg P & P \text{ atomic but different from } \bot \\
(A \wedge B)^G & \equiv & A^G \wedge B^G & \\
(A \rightarrow B)^G & \equiv & A^G \rightarrow B^G & \\
(A \vee B)^G & \equiv & \neg(\neg A^G \wedge \neg B^G) & \\
(\forall x.A)^G & \equiv & \forall x.\, A^G & \\
(\exists x.A)^G & \equiv & \neg\forall x.\neg A^G \quad . &
\end{array}
$$

משפט זה, אשר הוכח רק בשנות ה-30 וגם אז כנראה לא הובן עד הסוף, מצביע על קשר חזק מאד בין המתמטיקה הקלאסית למתמטיקה האינטואיציוניסטית. הוא למעשה מוכיח שהמתמטיקה הקלאסית קונסיסטנטית אם ורק אם המתמטיקה הקונסטרוקטיבית קונסיסטנטית (כי באחת יש הוכחה של סתירה אם ורק אם בשניה יש). מנקודת מבט מודרנית, לאחר משפט אי-השלמות השני של גדל, לפיו לא ניתן להוכיח את קונסיסטנטיות המתמטיקה הקלאסית, ברור שהאינטואיציוניזם אינו יכול להוות פתרון לבעיית היסודות של המתמטיקה כפי שטענו תומכיו בזמנו. תומכים אלו טענו שהקונסטרוקטיביזם מבטיח מתמטיקה קונסיסטנטית, ורק שנים לאחר מכן התגלה שטענה זו אינה נכונה. עם זאת, הידע הנ"ל לא היה קיים בתקופה בה האינטואיציוניזם הוצג והעסיק את הקהילייה המתמטית, ולכן רלוונטי לדיון באינטואיציוניזם רק בדיעבד.