מגיש: יונתן בן-ארצי
ת.ז.: 039069307

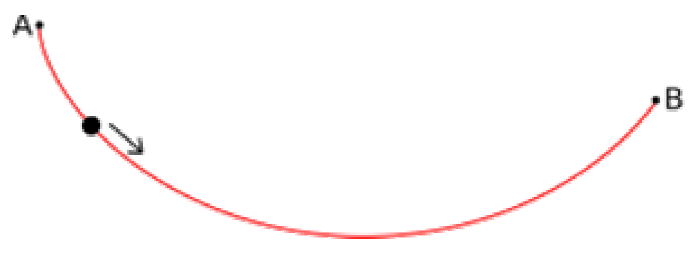
תאריך: ספטמבר 2005

קורס: תולדות המתמטיקה 80402
מרצה: פרופ' אהוד הרושובסקי

עבודה מסכמת

בנושא:

בעיית ה-Brachistochrone

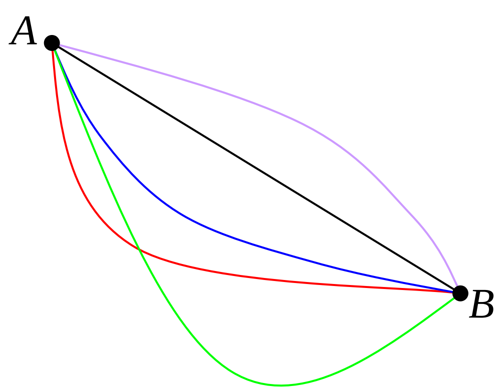


<u>תוכן עניינים</u>

תיאור הבעיה

המילה *brachistochrone* מורכבת מן המלים היווניות *brachistos*, שפירושה "הקצר ביותר," ו-*chronos*, שפירושה "זמן."

הבעיה, אם כן, הינה בהינתן שתי נקודות, A ו-B במרחב, למצוא מסלול קשיח ביניהן, כך שגוף הנופל לאורכו ללא חיכוך ובהשפעת כוח הכבידה בלבד, יגיע בזמן מינימלי מ-A ל-B (ר' איור 1).



איור 1: בעיית הזמן הקצר: מהי העקומה האופטימלית?

פיתרון מודרני לבעיה[1]

היום אנו יכולים לתת פיתרון סטנדרטי, "מודרני", לבעיה, על אף שהכלים בהם אנו נשתמש אינם מודרניים כלל ועיקר. הכלים הללו הם כלים, שבין השאר, פותחו בעקבות פיתרון בעיית ה-brachistochrone.

ראשית, נניח ב.ה.כ. כי הנקודה A מצויה בראשית, וכי הגוף נופל ממצב מנוחה (אחרת נוספים קבועים). בנוסף, נקבע ציר x להיות הציר האנכי, ואת ציר y להיות הציר האופקי. (קביעה זו של הצירים מופיעה בכל המקורות שקראתי, ונראה, כי היא שריד של הסימונים של לייבניץ בהקשר זה). אנו יודעים כי אנרגיה קינטית ניתנת ע"י $E_K = \frac{1}{2}mv^2$, ואנרגיה פוטנציאלית נתונה ע"י $E_P = mgx$. מחוק שימור אנרגיה נקבל

[1] הפיתרון עפ"י [7, Goldstine] עמ' 32-34.

$$. v^2 = 2gx \qquad (1)$$

אם נסמן את פרמטר האורך לאורך העקומה ב- s, הרי שהמהירות ניתנת ע"י $\dot{s} \equiv ds/dt$ ואז אנו יודעים כי זמן התנועה לאורך העקומה ניתן ע"י $T = \int \frac{arc\ length}{velocity} = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\dot{s}}{v} dt$. לכן, נוכל להשתמש בכך ש- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ כדי לקבל שזמן הנפילה מ-A ל-B, ניתן ע"י:

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gx}} dt \qquad (2)$$

כאשר $\dot{y} \equiv dy/dt$, $\dot{x} \equiv dx/dt$. אנו מחפשים מינימום לאינטגרל זה. נשים לב כי האינטגרנד (עד כדי $1/\sqrt{2g}$),

$$f(x, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{x}} \qquad (3)$$

אינו תלוי מפורשות ב- y, ולכן לפי משוואות אוילר-לגרנז' אנו מקבלים:

$$. 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{x\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}}\right) \qquad (4)$$

לחילופין, נוכל לרשום

$$, \frac{\dot{y}}{\sqrt{x\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \qquad (5)$$

כאשר $a \neq 0$ קבוע כלשהו. מכאן נוכל לקבל את המשוואה הבאה:

$$. \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \qquad (6)$$

עתה, אם נגדיר את הזווית τ להיות הזווית שיוצר המשיק לעקום עם ציר y, כלומר $\cos\tau = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$, משוואה (5) הופכת ל-

$$x = 2a\cos^2\tau = a\left(1+\cos 2\tau\right), \qquad (7)$$

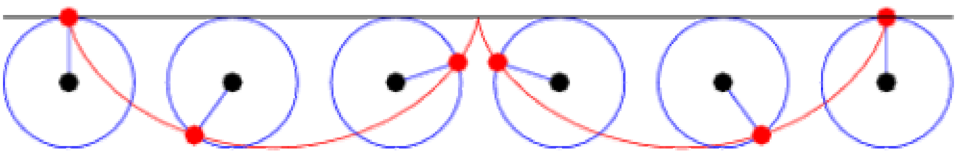
כלומר $x' = -2a\sin 2\tau$, כאשר $x' \equiv dx/d\tau$, וכנ"ל עבור y. מחשבון טריגונומטרי פשוט נובע ש- $y' = \pm 4a\cos^2\tau$. לחילופין, נוכל לרשום (עד כדי קבוע)

$$y = \pm a\left(2\tau + \sin 2\tau\right). \qquad (8)$$

אם נחליף את τ בזווית $\varphi = 2\tau + \pi$ המשוואות (7) ו-(8) יקבלו את הצורה (עד כדי קבועים)

$$\begin{aligned} x &= r\left(1-\cos\varphi\right) \\ y &= \pm r\left(\varphi - \sin\varphi\right) \end{aligned} \qquad (9)$$

כאשר r קבוע כלשהו. צמד המשוואות הללו הן משוואות העקומה הידועה בשם **ציקלואידה (*cycloid*)** - עקומה הנוצרת ע"י נקודה קבועה על גלגל ברדיוס r המתגלגל לאורך קו ישר.



איור 2 ציקלואידה (באדום): עקומה הנוצרת ע"י נקודה על גלגל מתגלגל

הציקלואידה

הציקלואידה הינה עקומה מיוחדת, שהייתה מוכרת מאוד בסוף המאה ה-17. מתברר, שבנוסף להיותה הפיתרון לבעיית ה-brachistochrone, הציקלואידה פותרת גם את בעיית ה- tautochrone (פיתרון של הויגנס מ-1673) – עקומה שזמן המחזור של גוף המחליק לאורכה יהיה בלתי תלוי באמפליטודה. פיתרון הבעיה הזו היה חשוב מאוד בפיתוח שעוני מטוטלת מדויקים, ששימשו, בין השאר, נווטים בים.[2]

[2] ראה [Gindikin ,6], עמ' 78-79.

רקע היסטורי

למרות שמה היווני של הבעיה, היוונים לא דנו בבעיה זו. הראשון לגלות עניין בבעיה זו היה **גלילאו**, בשנת 1638. בספרו *Dialogue Concerning Two New Sciences*, העלה גלילאו את הבעיה, ופתר אותה באופן שניתן לפרשו כשגוי.[3]

אחריו, היה זה יוהאן ברנולי אשר פתר עצמאית[4] (וחשאית) את הבעיה בשנת 1696. לאחר מכן, איתגר את כל העולם המדעי כאשר פרסם את הבעיה בירחון המדעי החשוב של זמנו, ה-*Acta Eruditorum*, ביוני 1696. כך הוא ניסח אותה:

> *Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time.*

אך קדמה לכך הקדמה מפוארת:

> *I, Johann Bernoulli, address the most brilliant mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem, whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to gain the gratitude of the whole scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall publicly declare him worthy of praise.*

אכן, אתגר שקשה להתעלם ממנו. יוהאן ברנולי לא הסתפק בכך, ולאחר ניסוח הבעיה עצמה הוא הוסיף עקיצה, שנראה שהייתה מכוונת כלפי ניוטון, אשר פיתח,

---

[3] כך עפ"י מקורות [7, Goldstine] ו-[8, O'Connor]. לעומת זאת, עפ"י מקור [12, Tikhomirov] ומקור [4, Erlichson] זו פרשנות שגויה לפתרונו של גלילאו. בפרק הבא אתייחס לשתי הפרשנויות.

[4] גם בעניין זה אין תמימות דעים בין המקורות: עפ"י מקור [2, Boyer], יוהאן ברנולי נתן הוכחה שגויה (על אף שהתשובה הסופית כן הייתה נכונה), ואת הפיתרון הנכון הוא ניסה לגנוב מאחיו, יעקוב (ר' עמ' 417 ב-[2]).

במקביל לאסכולה האירופאית (ובראשה לייבניץ) ניסוח מקביל לחשבון האינפיניטסימלי (*Calculus*):

> *...there are fewer who are likely to solve our excellent problems, aye, fewer even among the very mathematicians who boast that* [*they*]*... have wonderfully extended its bounds by means of the golden theorems which* (*they thought*) *were known to no one, but which in fact had long previously been published by others.*

לאתגר נענו ניוטון, לייבניץ, ל'ופיטל (de L'Hôpital), ובנוסף להם שני האחים למשפחת ברנולי – יוהאן שהעלה את הבעיה, ואחיו יעקוב (Jacob). ראשון פורסם פתרונו של ניוטון בעילום שם ב-*Philosophical Transactions of the Royal Society* בינואר 1697. הפתרונות (כולל זה של ניוטון, עדיין בעילום שם) פורסמו במהדורת מאי 1697 של ה-*Acta Eruditorum*, למעט זה של ל'ופיטל שפורסם רק ב-1988.[5]

לטענת הביוגרף קונדוויט, ניוטון פתר את הבעיה לאחר שחזר עייף בארבע אחר הצהריים: בתוך שתים-עשרה שעות הפיתרון היה מוכן. אולם ניוטון עצמו לא נשאר חייב להתגרות מצידו של יוהאן ברנולי, וציטט אותו חברו הקרוב, צ'ארלס מונטייג (Charles Montague) כאומר:

> *I do not love to be dunned* [*pestered*] *and teased by foreigners about mathematical things...*

בראייה עכשווית, נהוג להתייחס לבעיה זו כאל ראשית התחום הידוע כיום בשם "חשבון ווריאציות." הפתרונות השונים, כפי שנראה בסקירה בפרק הבא, השתמשו בשיטות שונות. שיטות אלו הוכללו ע"י אוילר ואחריו ע"י לגרנז'. לגרנז' היה זה שארגן את המשוואות המתקבלות באופן האלגנטי ביותר, הידוע בשמו *משוואות אוילר-לגרנז'* (הדגמה לשימוש בהן ראינו בפרק הקודם):

$$\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right). \qquad (10)$$

[5] עפ"י מקור [8, O'Connor].

הפתרונות השונים

בפרק זה אסקור את הפתרונות השונים שניתנו לבעיה, כולל הפיתרון השנוי במחלוקת של גלילאו, איתו אתחיל:[6]

גלילאו

כאמור, ישנה מחלוקת לגבי מידת הדיוק של גלילאו. ב- Theorem XXII, Proposition XXXVI בספרו *Dialogue Concerning Two New Sciences*, מתחיל גלילאו בבעיה הבאה:

> *If from the lowest point of a vertical circle, a chord is drawn subtending an arc not greater than a quadrant, and if from the two ends of this chord two other chords be drawn to any point on the arc, the time of descent along the two latter chords will be shorter than along the first, and shorter also, by the same amount, than along the lower of these two latter chords.*

לאחר שהוא מוכיח את הטענה הזו, ההמשך הוא מידי: ב-Scholium לטענה זו, טוען גלילאו כי

> *From the preceding it is possible to infer that the path of quickest descent [lationem omnium velocissimam] from one point to another is not the shortest path, namely, a straight line, but the arc of a circle.*

בשלב זה נחלקות הדעות: הכותבים ב-[4] וב-[12] (עמ' 56) טוענים כי גלילאו אינו טועה, מאחר והוא אינו מחפש זמן מינימלי כללי, כפי שנדרש בבעיית ה-brachistochrone, אלא הוא מגביל את עצמו למצולעים הבנויים על רבע מעגל. בהינתן מגבלה זו, טוען הכותב ב-[4], אין משגה בטענתו של גלילאו כי הזמן הקצר ביותר

---

[6] הפתרונות השונים (למעט זה של גלילאו), רשומים בהרחבה ב-[7, Goldstine] וב-[12, Tikhomirov], ופיתרונו של יוהאן ברנולי מוצג בצורה יפה מאוד גם ב-[3, Courant] עמ' 383-384, ב-[4, Erlichson] וב-[11, Struik], שם גם ניתן פתרונו של יעקוב ברנולי (עמ' 392-399).

יתקבל למעשה בגבול של כל המצולעים הללו, כלומר רבע המעגל עצמו. חיזוק נוסף לטענה זו, נותן גלילאו בהערה הבאה אותה הוא רושם בתום ההוכחה-

> *What has been proven for the quadrant holds true also for smaller arcs; the reasoning is the same.*

גלילאו אינו טוען כאן כי הוכיח טענה כללית, אלא כי הוכיח עבור רבע מעגל בלבד.

כאמור, הכותבים במקורות [7] ו-[8] חולקים על פרשנות זו. הם גורסים כי גלילאו טוען בדיון הנ״ל כי זהו הפיתרון הכללי לבעיית הזמן הקצר ביותר. הטענה היא כי אמנם נכונה הטענה מספר 36 (כי זמן הנפילה לאורך שני מיתרים קצר יותר), אולם ה-Scholium, אינו נכון – כלומר, לא נכונה הטענה כי גבול של מסלולים מהירים הוא המסלול המהיר ביותר אבסולוטית.

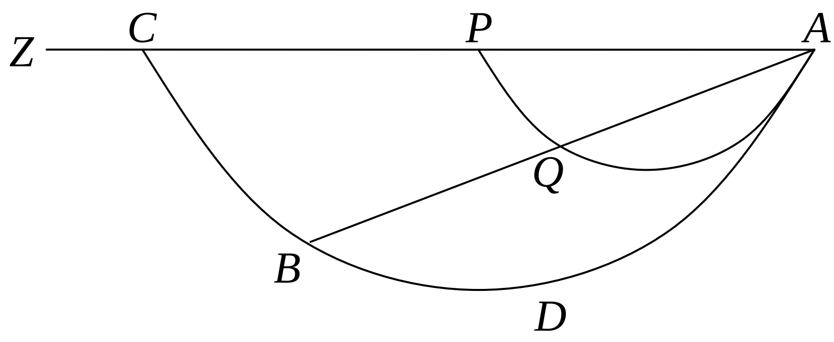
נטיית הלב שלי, במיוחד לאור ההערה שמוסיף גלילאו בסוף הדיון, היא להסכים עם הטענה שלא נפלה שגגה בפתרונו של גלילאו, וכי הוא אכן הגביל את עצמו לרבע מעגל. גלילאו אינו מעלה אף טענה בדבר כלליות הפיתרון שלו. אני סבור כי זו תהיה המעטה בערכו של גלילאו, לטעון כי הוא חשב שהעובדה שמצא סדרת מסלולים מהירים זה מזה גוררת כי הגבול שלהם הוא המסלול המהיר ביותר אבסולוטית.

יתרה מכך, ברור שהוא אינו נותן פיתרון כללי לתנועה בין שתי נקודות במרחב, שכן מעטות הן הנקודות ביניהן ניתן לשרטט רבע מעגל אשר מתחיל בשיפוע אינסופי בצידו האחד, ומסתיים בשיפוע אפס בצידו האחר.

<u>ניוטון</u>

להלן הפיתרון של ניוטון כפי שמובא ב-[7]:

> *Through the given point A draw the horizontal line APCZ and on it first describe any cycloid AQP cutting the line AB (produced if need be) in the point Q and second another cycloid ABC whose base and altitude are, respectively, as AB is to AQ. This last cycloid passes through point B and is the curve along which a heavy particle will descend most quickly from the point A to the point B. QEI.*



איור 3: הפיתרון של ניוטון

בכך מסתיימת ההוכחה של ניוטון. עם זאת, נראה שניוטון היה מודע לכך שיקבל את משוואה (6) שראינו לעיל, ומשם בנקל ראה (כנראה) כי התוצאה הינה ציקלואידה.

כך או כך, על אף שהפיתרון נשלח באנונימיות, לימים אמר יוהאן ברנולי כי הוא "מזהה את האריה מהמגע שלו"[7] – כלומר, הוא הכיר את סגנונו של ניוטון מספיק טוב בכדי לזהות כי זהו פתרונו.

יוהאן ברנולי

בין אם ניסה יוהאן לגנוב פיתרון מאחיו יעקוב ובין אם לאו, הרי שתרומתו חשובה בכך שהיה זה הוא שהעלה את הבעיה הזו בשנת 1696, וגאוניותו התבטאה בפיתרון שפירסם בסופו של דבר (ועליו אין מחלוקת שהינו אותנטי).

יוהאן משתמש בפיתרון הידוע לאופן מעבר אור בין תווכים בעלי אינדקס שבירה שונה: הוא מיישם את עקרון פרמה, על פיו אור היוצא מנקודה מסוימת במרחב לנקודה אחרת יעבור במסלול שבו ינוע בזמן הקצר ביותר. מחוק סנל אנו יודעים כי סינוס זווית השבירה פרופורציונאלי לאינדקס השבירה באותו תווך, ובדיוק בכלל זה משתמש יוהאן ברנולי. לשם כך, מחלק יוהאן את מישור התנועה לפסים אופקיים. את המהירות שבה ינוע הגוף בכל פס הוא יודע מחוק שימור

[7] ראה [7, Goldstine], עמ' 35.

אנרגיה, וכך הוא נותן, למעשה, לכל פס אינדקס שבירה (בדומה לאינדקס שבירה הניתן לאוויר, מים, וכיו"ב, לגבי מעבר אור).

יעקוב ברנולי

בעוד שהפיתרון של אחיו, יוהאן, מראה גאוניות בכך שהמיר בעיה מתחום אחר לחלוטין למונחים של הבעיה הנתונה, הרי שהפיתרון של יעקוב הוא "יבש" יותר, אם כי הוא זה שבמידה רבה שימש הבסיס לפיתוח חשבון הוריאציות ע"י אוילר ולגרנז'. לא אפרט כאן את שלבי הפיתרון, אך אציין כי השלב הקריטי, הוא השלב בו טוען יעקוב, למעשה, כי עבור המסלול המינימלי, כל ווריאציה, תיתן, בקירוב ראשון, מסלול בעל אותו זמן תנועה.

כעת ניתן להבין מדוע דווקא פיתרון "יבש" זה היה הבסיס לפיתוח חשבון הווריאציות, שם הרעיון הזה הוא לב העניין: עבור מסלול "מינימלי", אנו דורשים ווריאציה אפס, כלומר אם $S=\int_{t_1}^{t_2} f\left(q,\dot{q},\ldots\right)dt$, אזי $\delta S=0$ היא הדרישה הבסיסית שלנו. (כמובן, שאנו מניחים שהמסלולים בעלי אותן נקודות התחלה וסוף, ושהם גזירים מספיק פעמים). מכאן אנו נקבל את משוואה (10).

לייבניץ

הפיתרון של לייבניץ הוא בעל אופי יותר גיאומטרי. את משוואה (6) הוא רושם ללא הסבר כיצד קיבל אותה. משם הוא ממשיך בשיקולים גיאומטריים, תוך שימוש בחוק של גלילאו $x=\frac{1}{2}gt^2$. בסופו של דבר הוא מקבל משוואה הנותנת ציקלואידה, אם כי הוא אינו מציין בשום מקום כי מדובר בציקלואידה.

ביבליוגרפיה

1. Bell, E. T. Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937.
2. Boyer, Carl B. A History of Mathematics. New York: Wiley, 1991.
3. Courant, Richard, and Robbins, Herbert. What is Mathematics? New York: Oxford University Press, 1948.
4. Erlichson, Herman. "Johann Bernoulli's Brachistochrone solution using Fermat's principle of least time." European Journal of Physics **Vol. 20**, 299-304, September 1999.
5. Galilei, Galileo. Dialogue Concerning Two New Sciences (Translation by Henry Crew and Alfonso de Salvio Macmillan, 1914).

   URL: http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/
6. Gindikin, Semyon. Tales of Physicists and Mathematicians. Boston: Birkhäuser, 1988.
7. Goldstine, Herman H. A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. New York: Springer-Verlag, 1980.
8. O'Connor, John J., and Robertson, Edmund F. "History topic: The Brachistochrone problem." February 2002.

   URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html
9. Stillwell, John. Mathematics and Its History. New York: Springer-Verlag, 1989.
10. Struik, Dirk J. A Concise History of Mathematics. Courier Dover Publications, 1987.
11. Struik, Dirk J. A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Princeton: Princeton University Press, 1986.
12. Tikhomirov, V. M. Stories About Maxima and Minima. AMS, 1999.