עבודת סיכום בקורס תולדות המתמטיקה בנושא כריעות הגיאומטריה האוקלידית מדקארט ועד טרסקי

מגיש: רועי ברלנד
ת.ז: 033386731

כריעות ושלמות, חלום ומציאות

בשנות ה – 20 של המאה הקודמת יזם המתמטיקאי הגרמני דויד הילברט תוכנית שמטרתה הייתה ניסיון למציאת בסיס אקסיומטי מלא לכלל המתמטיקה, כלומר מציאה של מערכת אקסיומות עקבית וסופית (T) שמתוכה נוכל לגזור את כלל האמיתות המתמטיות. דרישה זו לגבי "כלל" האמיתות המתמטיות טומנת בחובה גם דרישה לקיומו של אלגוריתם, או דרך מכנית (להלן שיטת הכרעה), שתאפשר בהינתן פסוק φ להחליט בזמן סופי האם φ משפט מתמטי אמיתי ב- T (האם $T \models \varphi$).

חלומו של הילברט נגוז בשנת 1931 עם פרסומם של משפטי אי השלמות של קורט גדל. משפטי אי השלמות מראים כי בכל תורה מתמטית עשירה דיה (למשל כל תורה מתמטית בה ניתן לייצג את המספרים הטבעיים N כקבוצה) יהיו פסוקים שלא נוכל להוכיח את אמיתותם ולא לסתור אותם. אולם, למרות התוצאה השלילית של גדל, עדיין קיימות תורות מתמטיות מעניינות ועשירות שהן שלמות, דהיינו לכל פסוק בשפה מתקיים כי $T \models \varphi$ או $T \models \neg\varphi$ וכריעות, דהיינו לגבי כל פסוק קיימת פרוצדורת בדיקה מכנית בעזרתה ניתן לבדוק האם $T \vdash \varphi$ או $T \vdash \neg\varphi$.

דוגמה לתורה שכזו הנה הגיאומטריה האוקלידית של המישור הדנה ביחסים בין ישרים ונקודות. מערכת אקסיומות שלמה לגיאומטריה האוקלידית הוצגה ע"י דויד הילברט עצמו וכללה 20 אקסיומות, הרבה יותר מחמשת הפוסטולטים שהופיעו בספר היסודות של אוקלידס (וזאת משום שהפוסטולטים האוקלידים הניחו הנחות סמויות נוספות הנמצאות בשימוש בהוכחות עצמן). שיטת הכרעה עבור הגיאומטריה האוקלידית פותחה ע"י אלפרד טרסקי ופורסמה רשמית ב 1951 (למרות שהתוצאות המרכזיות היו ידועות כבר ב 1930). כפי שנראה, חלק מרכזי בעבודתו של טרסקי מתבסס על רעיונותיו המהפכניים של המתמטיקאי והפילוסוף הצרפתי רנה דקארט (1596-1650) ובתגליותיו בתחום הגיאומטריה האנליטית.

הגיאומטריה של דקארט

הגיאומטריה האוקלידית של המישור המופיעה בספרי היסודות של אוקלידס פותחה ע"י היוונית הקדמונים. ספר היסודות הראשון פותח במספר הגדרות וברשימת חמשת האקסיומות או הפוסטולטים שמהם גוזר אוקלידס ומוכיח משפטים ולמות ומהם עוד משפטים וכך הלאה.

במשך שנים היוותה הגיאומטריה האוקלידית מופת מחשבתי, מתמטי ואסתטי בתחומים רבים ונעשה ניסיון לאמץ את המודל האוקלידי של הגדרות, הנחות, משפטים וכדומה כדרך דדוקטיבית לביסוסה של תורה. דוגמה טובה לכך היא הספר "האתיקה" מאת הפילוסוף ברוך שפינוזה.

ההוכחות הגיאומטריות בספר היסודות נעשות בשיטות שונות ומגוונות וללא מאפיין אחיד לכולן, כלומר אין למשל בנית עזר יחידה המתאימה לפתרון כל הבעיות הגיאומטריות מסוג מסוים.

שינוי מהותי בתפיסת הגיאומטריה והוכחותיה מתרחש במאה ה 17 עם גילויה ופיתוחה של הגיאומטריה האנליטית בידיהם של רנה דקארט ופייר דה פרמה.

בדיוננו נתמקד בחלקו הראשון של ספרו של דקארט, "La Geometrie" שפורסם בשנת 1637. החלק הראשון עוסק בגיאומטריה של המישור, ואילו שאר הספר עוסק בגיאומטריה של חתכי חרוט.

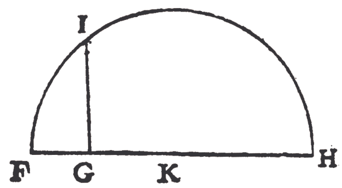
הספר נפתח בהצהרה כי:

> "כל בעיה בגיאומטריה יכולה לעבור רדוקציה לכך שידע בדבר אורכם של קוים ישרים מסוימים הנו מספיק לבנייתה"

הרדוקציה עליה מדבר דקארט הנה המעבר מגיאומטריה לאלגברה, כלומר, כפי שבאריתמטיקה ישנן 5 פעולות חשבון בסיסיות (כפל, חילוק, חיבור, חיסור והוצאת שורש) כך גם בגיאומטריה - בכדי למצוא קו מסוים או עקום, מספיק לחבר, לכפול ולעשות פעולות אלמנטריות על קוים ומכיוון שהגיאומטריה מכילה אובייקטים כקווים, נקודות ומעגלים, מתן ביטוי אלגברי לישויות אלו ע"י משואות וביטוי נקודות החיתוך ביניהם ע"י משוואות, הנו המפתח לפתרון כל בעיה גיאומטרית.

למשל, נראה כיצד מוצא דקארט שורש ריבועי באמצעים גיאומטריים:

אם נרצה לחשב את השורש הריבועי של GH נוסיף קטע באורך "יחידה" FG (אורך קבוע מראש שהחלטנו שייצג את היחידה), לאחר מכן נחצה לשניים את הקטע FH בנקודה K ונצייר חצי מעגל FIH עם הנקודה K כמרכז. כעת נעלה אנך מהנקודה G ונאריכו עד לנקודה I. הגודל GI הוא השורש המבוקש.



הסבר: מיחסים במשולשים הדומים ΔGIF ו ΔGHI נקבל

$$\frac{GI}{GH}=\frac{FG}{GI} \quad \Leftarrow \quad GH = FG\cdot GH = GI\cdot GI$$

נשים לב כי דקארט מדבר על זיהוי יחיד של "קטעים" או קוים לפי אורכם, כאשר כיום ע"י שימוש במערכות צירים אנו נזהה נקודה ע"י קואורדינטות המציינות את המרחק מנקודת האפס על כל ציר במערכת. כך למשל, נוכל להגדיר מעגל ביחידות באמצעות נקודת המרכז והרדיוס שלו.

בהמשך מתאר דקארט דרך אלגוריתמית לפתרון בעיות גיאומטריות:

> "לכן אם ברצוננו לפתור בעיה כלשהי נניח תחילה כי כבר פתרנו אותה וניתן שמות לכל הקווים הנדרשים לבנייתה, לאלו הידועים ולאלו שלא, ואז ללא הבחנה בין קטעים ידועים ונעלמים עלינו לפתור בכל דרך המראה את היחסים בין הקטעים, עד אשר נמצא דרך לבטא קטע (quantity במקור) בשתי דרכים, דבר זה יאפשר יצירת משוואה........ אנו חייבים למצוא כמה שיותר משוואות כמספר הקווים הנעלמים, אולם אם לא ניתן לעשות זאת לאחר שלקחנו בחשבון את כל הגלום במערכת, זוהי ראיה שהשאלה אינה ניתנת להכרעה מוחלטת, ובמקרה זה נוכל לבחור קוים שרירותיים לכל קו נעלם שלא מתאימה לו משוואה"

כעת, לאחר שיצרנו את מערכת המשוואות, ממשיך דקארט ומסביר כי יש להתחיל בפעולת חילוץ הנעלמים ע"י השוואת משוואות אחת עם השניה עד לקבלת ערך עבור כל אחד מן הנעלמים ונעצור כאשר נשאר עם קו נעלם אחד השווה לקו ידוע, או לריבועו, או לחזקה כלשהי שלו, או לסכום קוים ידועים...

נשים לב כי בחלק זה של פתרון המערכת מגלם דקארט את העובדה כי תמיד נוכל לבודד נעלם מתוך מערכת המשוואות ע"י פעולות אלמנטריות. כפי הנראה מניח דקארט כי ניתן לפתור כל משוואה ע"י אמצעים של פעולות אלמנטריות והוצאת רדיקלים. כמובן שבנקודה זו שוגה דקארט, שכן כידוע כמסקנה למשפט גלואה מתקבלת העובדה כי לפולינומים ממעלה חמישית ומעלה אין בדרך כלל פתרון ע"י הוצאת רדיקלים. בהמשך נתייחס לטעות זו ונראה כיצד התמודדה המתמטיקה המודרנית עם הבעיה.

שיטתו של דקארט עומדת כאמור על שלושה שלבים מרכזיים לפתרון בעיה:

1. מתן שמות לקטעים – זיהוי יחיד של כל קטע ע"פ אורכו. לקווים ומעגלים נכתבות משוואות המייצגות אותם.
2. הבעת היחסים בין הישויות במערכת ע"י מערכת משוואות.
3. פתרון מערכת המשוואות.

מתוך תיאור האלגוריתם הנ"ל מגיע דקארט למסקנה הגורפת הבאה:

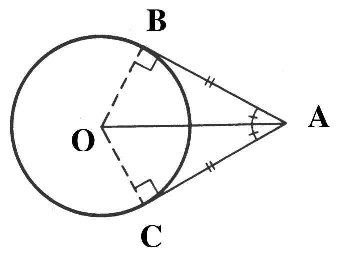
> "נתתי דוגמאות פשוטות אלו בכדי להראות שניתן לבנות את כל הבעיות של הגיאומטריה הרגילה ע"י לא הרבה יותר משהוסבר בדוגמאות ובציורים לעיל. זהו דבר שהנני מאמין כי המתמטיקאים הקדמונים לא עמדו עליו, שכן אחרת לא הייתה מושקעת כל כך הרבה עבודה בכתיבת מספר כה רב של ספרים בהם סדרות ההוכחות מראות כי לא הייתה בידם שיטה בטוחה למצוא את כולם."

טענה זו היא בעלת חשיבות עליונה לדיוננו, שכן היא נושאת בחובה רעיון פילוסופי מהפכני והוא כי שיטתו של דקארט מסוגלת "להחליט" בדבר אמיתותם או שקריותם של כל המשפטים בגיאומטריה האוקלידית של המישור, כלומר האלגוריתם הקרטזיאני נותן מענה לכל הבעיות (הידועות והבלתי ידועות) בתחום מתמטי אין סופי.

דקארט למעשה טוען כי בידיו פרוצדורת הכרעה לגיאומטריה של המישור ועוד, זוהי שיטה שבעזרתה ניתן לגלות אמיתות גיאומטריות חדשות.

בכדי לא להשאיר באוויר וללא המחשה את האמור לעיל עד כה נתבונן בבעיה גיאומטרית פשוטה ונראה כיצד היא מוכרעת בידי השיטה הקרטזיאנית.

ניקח למשל את המשפט הפשוט הבא: 'שני משיקים למעגל היוצאים מאותה הנקודה שמחוץ למעגל שווים זה לזה'



הוכחה אוקלידית לטענה תשתמש בבניית עזר של הישר AO ולאחר מכן הוספת הרדיוסים OB ו OC ותסיים בשימוש במשפט חפיפה מהסוג צלע צלע זווית עם המשולשים ΔABO ו ΔACO.

נראה פתרון מקוצר בשיטה הקרטזיאנית ולשם פשטות נשתמש במערכת צירים ונניח כי מרכז המעגל יושב על ראשית הצירים (עבור מעגל בעל מרכז כלשהו ההוכחה זהה). כמובן שיש להצדיק את משוואות המעגל והישרים המשיקים אולם מכיוון שמדובר בהמחשה בלבד לא נתעכב על כך כאן.

את המעגל ניתן לתאר ע"י המשוואה:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

נעבור לקואורדינטות קרטזיות ונכתוב את הנקודות: $C = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $A = (x_3, y_3)$

משוואות הישר שתתאר את AB כמשיק למעגל בנקודה B:

$$x \cdot x_2 + y \cdot y_2 = R^2 \qquad (2)$$

משוואות הישר שתתאר את AC כמשיק למעגל בנקודה C:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = R^2 \qquad (3)$$

מכיוון שהנקודה A נמצאת על הישרים AB ו AC, נקבל את המשוואות (4) ו- (5) בהתאמה:

$$x_3 \cdot x_2 + y_3 \cdot y_2 = R^2 \qquad (4)$$

$$x_3 \cdot x_1 + y_3 \cdot y_1 = R^2 \qquad (5)$$

המרחק בין A ל B שנסמנו ב d(A,B) יהיה:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \qquad (6)$$

לכן נקבל כי:

$$d(A,B) = \sqrt{x_3{}^2 - 2x_3x_2 + x_2{}^2 + y_3{}^2 - 2y_3y_2 + y_2{}^2} \qquad (7)$$

מהצבת הנקודה B במשוואה (1) נקבל כי:

$$x_2{}^2 = R^2 - y_2{}^2 \qquad (8)$$

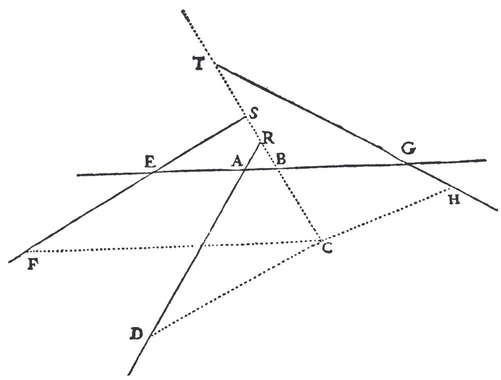
כעת נציב את (8) ו- (4) ב- (7) ונקבל כי:

$$d(A,B) = \sqrt{x_3{}^2 - 2(R^2 - y_3y_2) + R^2 - y_2{}^2 + y_3{}^2 - 2y_3y_2 + y_2{}^2} = \sqrt{x_3{}^2 - R^2 + y_3{}^2} \quad (9)$$

כלומר קבלנו ביטוי אלגברי לייצוג המרחק בין A ל B התלוי ב A וברדיוס המעגל (R) בלבד. כעת, אם נחזור על התהליך ונעריך את המרחק בין A ל C נקבל ביטוי זהה ל (9) עבור $d(A,C)$. כאמור דוגמה

פשוטה זאת מראה את פעולת האלגוריתם הקרטזיאני על כל שלביה, מכתיבת הנחות המשפט בצורה של מערכת משוואות ועד למסקנת המשפט המתקבלת מפתרונה של המערכת.

בשלב זה מראה דקארט את עליונותה של שיטתו ע"י פתרון בעיה המתוארת בכתביו של פאפוס כבעיה שלא אוקלידס ולא אפולוניוס הצליחו לפתור במלואה. הבעיה הנה בעיה של מציאת מיקומן הגיאומטרי של נקודות במישור והיא מנוסחת כך: בהינתן 3,4,5 או יותר קווים הנתונים במישור (אך ללא אורך ספציפי), נרצה תחילה למצוא נקודה שממנה נמתח קווים שכל אחד מהם יוצר זווית נתונה עם הקווים הידועים, כך שבמקרה של שלושה קווים נתונים – ריבוע אחד הקווים שמתחנו יהיה ביחס נתון למכפלת האחרים, או במקרה של ארבעה קווים נתונים שמכפלת שניים מן הקווים שמתחנו תהיה ביחס נתון למכפלת השניים האחרים, או במקרה הכללי של n קווים נתונים מכפלתם של k קווים תהיה ביחס נתון למכפלת n-k הקווים הנותרים. הבעיה הנה מציאת צורתו של העקום (המקום הגיאומטרי) עליו נמצאות כל הנקודות המקיימות את התנאים הנ"ל.



דקארט עורך את ההדגמה שלו לגבי המצב בו ישנם 4 קווים נתונים (ראה/י איור), כאשר C היא הנקודה אותה אנו מחפשים בכדי למתוח את הקווים CB, CD, CF, CH וכדומה שייצרו זוויות נתונות CBA, CDA... נסמן $x = AB$ ו $y = BC$, כעת נייצג את שאר הקווים בעזרת שני המשתנים x ו y שהגדרנו. מנתוני השאלה זוויות המשולש ΔARB ידועות וכך גם היחס בין הקווים AB ו BR. נסמן $AB : BR = z : b$ ומכך נקבל כי $RB = \frac{bx}{z}$ ומכיוון שהנקודה B נמצאת בין C ל R אז $CR = y + \frac{bx}{z}$.

כך ממשיך דקארט ונותן ביטוי לכל אחד מן הקווים בציור בעזרת x ו y וכעת קל לכתוב משוואות עבור המכפלה המבוקשת ולהשוות ליחס המבוקש ואז נוכל לתת ערך כרצוננו ל x ולקבל את y. כמו כן, ניתן לראות כי דרך הפתרון נותנת חסם על מעלת המכפלה כלומר מעלת המכפלה של מספר כלשהו של קווים המבוטאים ע"י x ו y לא תהיה גדולה ממספר הקווים (מעלת x ומעלת y).

לאחר שראינו בדוגמאות הקודמות כיצד מיושם האלגוריתם לפתרון בעיות ולהוכחות גיאומטריות, נתבונן כעת בדוגמה שתצביע על הקשר בין שיטתו של דקארט ללוגיקה המודרנית ולבעיית ההכרעה של הגיאומטריה. על אף שדקארט מדבר בעיקר על "בניות" (כמו בדוגמה האחרונה) ולא על הוכחות (כמו

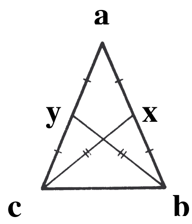
בדוגמה הראשונה), נראה כעת כיצד השיטה האנליטית מסייעת ל"הפטרות" מכמתים בנוסחאות של תחשיב היחסים ומאפשר הכרעה מכנית וקלה יחסית שלהן.

העולם בדוגמה יהיה המישור האוקלידי והמשתנים יעמדו עבור נקודות במישור. נבחר שני סימני יחס:

(1) $B(x, y, z)$ - שפירושו יהיה כי הנקודה y נמצאת בין הנקודות x ו z

(2) $D(x, y, z, w)$ - שפירושו יהיה המרחק בין הנקודות x ו y שווה למרחק בין הנקודות z ו w

כעת נצרין לשפת תחשיב היחסים את המשפט: 'במשולש שווה שוקיים התיכונים לשוקיים שווים'.



בהינתן משולש שווה שוקיים Δabc נכתוב:

$$\exists x \exists y \left[B(a,x,b) \wedge B(a,y,c) \wedge D(a,x,x,b) \wedge D(a,y,y,c) \wedge D(y,b,x,c) \right] \quad (1)$$

לאחר שניסחנו את המשפט בשפה פורמלית נשים לב כי קיומן של הנקודות x ו y הנו ברור וניתן להוכחה מן האקסיומות (למשל חמשת הפוסטולטים). אולם, השפה בה בחרנו אינה מאפשרת להצביע על הנקודות במפורש, כלומר כפי שקורה בדרך כלל בתחשיב היחסים, הכמת הישי מאפשר מתן פשר לאובייקטים שאין בכוח השפה להביעם. כעת, אם נעבור לשיטה הקרטזית ונתבונן בנקודות כבזוגות סדורים של מספרים ממשיים על מערכת צירים דו מימדית, נוכל לכתוב כי מרכז הקטע המחבר בין a ל b נתון ע"י $\frac{1}{2}(a+b)$, כאשר אנו מתייחסים ל a ו b כוקטורים במרחב הוקטורי $\Re^2$ מעל $\Re$ עם חיבור קואורדינטות וכפל בסקלר. נכתוב עכשיו מחדש את משפט (1) כ:

$$B(a,\frac{1}{2}(a+b),b) \wedge B(b,\frac{1}{2}(b+c),c) \wedge D(\frac{1}{2}(b+c),a,\frac{1}{2}(a+c),b) \quad (2)$$

קבלנו אם כן נוסחה חסרת כמתים השקולה ל (1), וזאת כי הצבענו על הנקודות y , x במפורש ואי לכך יכולנו להשמיט את כמתי הקיום מן הנוסחה. כעת, אם נחליף כל משתנה המציין נקודה p בשני משתנים $p = (p_0, p_1)$ שיציינו קואורדינטות במישור הממשי ואת סימני היחס נחליף במשוואות, למשל את סימן היחס D נכתוב כ:

$$D(x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1, w_0, w_1) \equiv \left[\sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2} = \sqrt{(z_0 - w_0)^2 + (z_1 - w_1)^2} \right]$$

נוכל לייצר מנוסחה (2) נוסחה חסרת כמתים המכילה 3 משוואות ואימותה הופך להיות טריוויאלי. כך באמצעות המעבר מן הגיאומטריה לאלגברה מתאפשרת החלפת נוסחאות בגיאומטריה בנוסחאות שקולות

חסרות כמתים המכילות משוואות אלגבריות אותן נוכל לפתור ולאמת את הנוסחה. כלומר, להכריע טענות במשפטים בגיאומטריה ע"י זיהוי הקשרים בין נקודות וישרים כמשוואות אלגבריות. יסודות מעמיקים אלו שנטעו בידי דקארט קבלו ביסוס מלא במהלך המאה ה-20 עם מאמרו של אלפרד טרסקי "שיטת הכרעה לאלגברה אלמנטרית וגיאומטריה".

<u>הכרעת הגיאומטריה בידי טרסקי</u>

מאמרו של טרסקי דן בשיטת הכרעה עבור אלגברה אלמנטרית, דהיינו המערכת המתקבלת עבור השפה $L=\{0,1,-1,+,\cdot,=,>\}$ (כשהסימנים מתפרשים באופן הרגיל) וקבוצת משתנים אין סופית $x,x_1,...,y,y_1,...,z,z_1,.....$ המקבלים ערכים מתוך קבוצת המספרים הממשיים. למערכת נוסיף את הסימנים הלוגים הרגילים ונגדיר נוסחאות אטומיות כנוסחאות מהצורה הבאה: $\alpha=0,\beta>0$, כאשר α ו β הנם שמות עצם כלשהם. למען פשטות הדיון שמות העצם עליהם נדבר יהיו פולינומים במשתנה יחיד ובמקדמים ממשיים.

כאמור, בחלק הקודם ראינו כי דקארט הניח בטעות כי כל מערכת אלגברית ניתן לפתור באמצעים אלמנטריים וע"י הוצאת רדיקלים. טרסקי מצליח להתמודד עם המכשול ע"י שימוש בשיטות קירוב, דהיינו, מסתבר כי מספיקה היכולת להתקרב כרצוננו לפתרונות המערכת ואין צורך למצוא אותם בפירוש. כפי שראינו בסוף החלק הקודם שיטת הכרעה עבור מערכת האלגברה האלמנטרית תהווה בעזרת שיטתו של דקארט שיטת הכרעה גם לגיאומטריה. שיטת הכרעה עבור מחלקה של משפטים K הנה פרוצדורה מכנית, כלומר כזו שנוכל לתכנת מחשב לבצעה ואינה דורשת כל חשיבה (מתכון). בעזרת שיטה זו נרצה להיות מסוגלים לקבוע במספר סופי של צעדים האם פסוק $\theta\in K$ או לא. אותנו תעניין כמובן מחלקת המשפטים האמיתיים באלגברה האלמנטרית.

שיטתו של טרסקי כוללת שני חלקים:

1. חילוץ כמתים (חשיב) - דהיינו בהינתן נוסחה θ בשפת האלגברה האלמנטרית נייצר נוסחה θ' שקולה וללא כמתים וללא משתנים חופשיים פרט לאלה שכבר מופיעים (מבחינה אינטואיטיבית נוסחאות חסרות כמתים הנן הנוסחאות הקלות ביותר להבנה בכל תורה).

2. בהינתן משפט θ' ללא כמתים - פרוצדורה המאפשרת להחליט באופן מכני האם θ' אמיתית.

הוכחת החלק הראשון נעשית באינדוקציה על מבנה הנוסחה לאחר שמראים כיצד לחלץ את הכמת מתוך נוסחאות מהצורה $(\exists\zeta)\theta$ כאשר θ נוסחה ללא כמתים.

ההוכחה של חילוץ הכמתים מתבססת רבות על ההרחבות למשפט שטרום (הוכח בשנת 1829 ע"י המתמטיקאי הצרפתי ז'אק צ'רלס פרנסואה שטרום, 1803-1855). ננסח את המשפט:

1. הגדרה: בהינתן פולינום $X = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + ...a_0$ נגדיר שרשרת שטרום להיות הסדרה הבאה: $X_0 = X \ , \ X_1 = X'$,

$$X_2 = -rem(X_0, X_1)$$

$$\vdots$$

$$0 = -rem(X_{r-1}, X_r)$$

כאשר X' היא הנגזרת של X ו $rem(X,Y)$ היא השארית המתקבלת מחלוקת הפולינום X בפולינום Y בעזרת האלגוריתם של אוקלידס.

2. יהי p(x) פולינום ותהי $\{X_i\}_{i=0}^n$ שרשרת שטרום שלו עבור $\alpha \in \Re$ נסמן ב $N_{p(x)}(\alpha)$ את מספר שינויי הסימן (בלי לספור אפסים) כתוצאה מהצבת α בשרשרת שטרום ($\{X_i(\alpha)\}_{i=0}^n$).

3. משפט שטרום: בהינתן פולינום $p(x) \in \Re[x]$ וסדרת שטרום שלו ומספרים ממשיים α ו β ו $\beta > \alpha$ אזי מספר האפסים של p(x) בקטע (α, β) הוא $N_{p(x)}(\beta) - N_{p(x)}(\alpha)$.

נראה כיצד ניתן להשתמש במשפט שטרום לחילוץ כמתים מתוך נוסחאות. נניח נתונים p(x) ו g(x) פולינומים מדרגה כלשהי ונתון הפסוק:

$$\psi_1 = \exists x_1 \exists x_2 [(\beta > x_1, x_2 > \alpha) \wedge (p(x_1) = 0) \wedge (p(x_2) = 0) \wedge (g(x_1) = 0) \wedge (g(x_2) = 0)]$$

נייצר ממנו פסוק חסר כמתים שאימותו טריוויאלי. נכתוב $s(x) = p(x)^2 + g(x)^2$, נחשב את $N_{s(x)}(\alpha), N_{s(x)}(\beta)$ ע"פ משפט שטרום ונשים לב כי התהליך חשיב וסופי, כעת נכתוב את הנוסחה: $\psi_1' = \left(N_{s(x)}(\beta) - N_{s(x)}(\alpha) = 2\right)$, זוהי נוסחה חסרת כמתים השקולה ל ψ_1. השימוש במשפט שטרום אפשר להיפטר מכמתי הקיום במשפט לא טריוויאלי, למשל אם הפולינומים g(x),p(x) ממעלות גבוהות מ 5 אין נוסחה המשתמשת בהוצאת רדיקלים שתאפשר לאמת את הפסוק. באותו האופן נוכל להתמודד עם נוסחאות מהצורה "קיים x בקטע (α, β) כך ש p(x)=0 או g(x)=0" ע"י הגדרת $s(x) = p(x) \cdot g(x)$ והפעלת הפרוצדורה לעיל.

המצב מסתבך כאשר נרצה לחלץ את הכמת ולהכריע נוסחאות מהצורה:
$\psi_2 = \exists_k \zeta [p(\zeta) = 0 \wedge g(\zeta) > 0]$, אותה נקרא "קיימים בדיוק k ערכים של ζ כך ש $p(\zeta) = 0$ וגם $g(\zeta) > 0$". נראה תחילה אלגוריתם אינטואיטיבי (אותו נוכל בקלות להמיר לקוד בכל שפת תכנות) להכרעת הפסוק, העושה גם כן שימוש במשפט שטרום ולאחר מכן נראה כיצד טרסקי מתמודד עם הבעיה. נגדיר שני מספרים p-max ו p-min, כך שכל השורשים של $p(\zeta)$ נמצאים בקטע (p-min,p-max),

מכיוון ש p(x) פולינום ומתקיים ש $p(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} \pm\infty$, קל לחשב חסמים כנ"ל. לאחר מכן נסרוק את הקטע (p-min,p-max) משמאל לימין ונבודד בעזרת משפט שטרום כל שורש של p(x) באינטרוול קטן מספיק, בו אין ל g(x) שורשים. תהליך זה ניתן לעשות למשל בעזרת חיפוש בינארי (מחלקים קטע לשניים ובודקים באיזה מן הצדדים נמצא מספר השורשים המבוקש וחוזר חלילה), ברגע שהגענו לקטע בו ל g(x) אין אפסים ול p(x) יש, נבדוק בנקודה שרירותית x_0 האם $g(x_0)>0$. כך נעבור בצורה שיטתית על הקטע (p-min,p-max) ונספור את הפעמים שקיימו את התנאים.

חלקו המרכזי של המאמר של טרסקי עוסק בפיתוח כלים שיאפשרו חילוץ כמתים והכרעה של נוסחאות מהצורה של ψ_2, ψ_1. טרסקי מגדיר 3 נוסחאות מרכזיות:

(1) $M_\zeta^n(\alpha)$ - נוסחה שמשמעותה ' ζ שורש מסדר n של הפולינום α ' (עבור $n=0$ משמעות הנוסחה ש ζ איננו שורש).

(2) $F_\zeta^n(\alpha,\beta)$ - נוסחה שמשמעותה 'קיימים בדיוק n מספרים ζ כך ש ζ שורש של α מסדר גבוה יותר מאשר ב β וההפרש בין הסדרים הוא אי זוגי וגם קיים קטע פתוח שנקודת הקצה הימני שלו היא ζ ועליו יש לפולינומים α ו β אותו הסימן'.

(3) $G_\zeta^n(\alpha,\beta)$ - נוסחה שמשמעותה 'קיימים מספרים n_1 ו n_2 כאשר n_1 מספק את הנוסחה $F_\zeta^{n_1}(\alpha,\beta)$ ו n_2 מספק את הנוסחה $F_\zeta^{n_2}(\alpha,(-1)\cdot\beta)$ ו $n=n_1-n_2$'.

בעזרת נוסחה (1) מגדירים את נוסחה (2), בעזרת נוסחה (2) מגדירים את נוסחה (3). למשל:

$$F_\xi^n(\alpha,\ \beta) \equiv \underset{n}{(E\xi)} \left\{ \bigvee_{\substack{0 \le k \le q \\ 0 \le 2m \le p-k-1}} \left[M_\xi^{k+2m+1}(\alpha) \wedge M_\xi^k(\beta) \right] \wedge \right.$$

$$\left. (E\eta_1)(E\eta_2) \left[(\eta_1 = \xi) \wedge (\xi > \eta_2) \wedge (A\xi) \left\{ \left[(\xi > \eta_2) \wedge (\eta_1 > \xi) \right] \longrightarrow (\alpha \cdot \beta > 0) \right\} \right] \right\}$$

(p ו q בנוסחה לעיל הם דרגות הפולינומים α ו β בהתאמה)

כעת מגדיר טרסקי בעזרת משפט שטרום אופרטור רקורסיבי S, שבהינתן נוסחה φ מהצורה (3) מייצר נוסחה שקולה $S(\varphi)$ חסרת כמתים. פעולת האופרטור S היא כדלקמן - בהינתן שני פולינומים α ו β בנוסחה מהצורה (3) נגדיר תנאי עצירה:

אם α או β הוא פולינום האפס – אזי $S(\varphi)\equiv(0=0)$, עבור $n=0$ ו $S(\varphi)\equiv(0=1)$, עבור $n\neq 0$.

אחרת (המקרה הכללי) - $S(\varphi)\equiv\psi\wedge S(\varphi')$ כאשר ψ נוסחה חסרת כמתים ו $\varphi'\equiv G^{n}_{\zeta}(\beta,-rem(\alpha,\beta))$. נעיר שתיאור ההגדרה המובא כאן הנו בקווים כללים בלבד להבהרת הרעיון, ההגדרה המקורית מורכבת יותר. כמו כן, הגדרת השארית השלילית עמה עובד טרסקי מעט שונה מההגדרה שניתנה בתחילת הפרק.

בכדי לחלץ כמתים מנוסחה מהצורה ψ_2 נהפוך את ψ_2 לנוסחה הבאה:

$$\psi_2{}' \equiv \bigvee_{\substack{2k=r_1-r_2+r_3\\ 0\le r_1,r_2\le m\\ -m\le r_3\le m}} \left(S(G^{-r_1}_{\zeta}(\alpha,\alpha'))\wedge S(G^{-r_2}_{\zeta}(\alpha^2+\beta^2,(\alpha^2+\beta^2)'))\wedge S(G^{-r_3}_{\zeta}(\alpha,\alpha'\cdot\beta))\right)$$

הערה: m היא דרגת הפולינום α וסימן ה $'$ הוא נגזרת.

<u>טענה:</u> $\psi_2{}'$ נוסחה חסרת כמתים ושקולה ל ψ_2.

<u>הוכחת הטענה:</u>

מהפסקה הקודמת ע"פ הגדרת האופרטור S נובע מיד כי $\psi_2{}'$ נוסחה חסרת כמתים. כעת נוכיח כי ψ_2 שקולה ל $\psi_2{}'$. נסמן ב t_1 את מספר השורשים של α בהם β חיובי וב t_2 את מספר השורשים של α בהם β שלילי. אזי $S(G^{-c}_{\zeta}(\alpha,\alpha'\cdot\beta))$ אמיתית אם ורק אם $c=t_1-t_2$, משום שנניח ש ζ שורש של α עליו β חיובי (ולכן מרציפות β גם בסביבה של ζ) ונניח שבאינטרוול (δ,ζ) שקצהו הימני הוא ζ, מתקיים ש $\alpha>0$. נקבל כי α יורדת על (δ,ζ) ולכן $\alpha'<0$, כלומר מההנחה על β נובע ש $\alpha'\cdot\beta<0$ ולכן מכיוון ש ζ שורש ממעלה גבוהה יותר של α ובהפרש אי זוגי (של 1) מב $\alpha'\cdot\beta$, נקבל שלפי הגדרת הנוסחה (3) מתקיים כי $t_1=n_2$ ובאותו אופן נוכל לקבל כי $t_2=n_1$ (באינטרוול כמו (δ,ζ) ל α ולα' סימנים הפוכים).

בדרך דומה נסיק כי $S(G^{-k}_{\zeta}(\alpha,\alpha'))$ אמיתית אם ורק אם k הוא מספר השורשים השונים זה מזה של α. משום שאם נסמן ב s_1 את מספר השורשים של α בסדר גבוה ובהפרש אי זוגי מ α' (נשים לב שכל שורש של α מקיים דרישה זו) עבורם קיים קטע פתוח (δ,ζ) בו ל α ולα' יש אותו סימן וב s_2 את

מספר השורשים של α בסדר גבוה ובהפרש אי זוגי מ α' עבורם קיים קטע פתוח (δ,ζ) בו ל α ול α' יש סימנים הפוכים, נקבל כי $s_1=0$ וכי $s_2=k$ ולכן $-k=s_1-s_2$ (כאמור בקטע פתוח קטן ש ζ קצהו הימני ל α ול α' סימנים הפוכים).

נסמן את מספר השורשים של α ב r_1, את מספר השורשים המשותפים של α ו β (השורשים של $\alpha^2+\beta^2$) ב r_2 ואת ההפרש בין מספר השורשים של α בהם β חיובי לבין מספר השורשים של α בהם β שלילי ב r_3. יהי k מספר השורשים של α בהם β חיובי. מכיוון שמתקיים כי $0 \le r_1, r_2 \le m, -m \le r_3 \le m$, אם נגדיר את r_4 להיות מספר השורשים של α בהם β שלילי נקבל מתוך מערכת המשוואות:

$$2k = r_1 - r_2 + r_3 (3) \quad \text{כי} \quad r_3 = k - r_4 \ (2), \quad r_1 - r_2 = k + r_4 \ (1)$$

על כן אם קיימים בדיוק k שורשים של α בהם $\beta>0$ נובע כי קיימים מספרים r_1,r_2,r_3 המקיימים את תנאי האיווי המרובה בנוסחה ψ_2'. באותו אופן, אם קיימים מספרים כנ"ל המקיימים את המשוואה (3) ואת ψ_2', נובע כי ל α בדיוק k שורשים בהם β חיובי.

סוף הוכחת הטענה.

בדרך דומה מחלץ טרסקי כמתים מנוסחאות בסיסיות נוספות של האלגברה האלמנטרית ע"י שימוש בנוסחאות (1), (2) ו- (3), כשהשלב הסופי בהוכחת המשפט הוא הפיכת הנוסחאות חסרות הכמתים לנוסחאות המכילות ביטויים מהצורה (0=0) ו (0=1) ואיוויים, גימומים וגרירות שלהם. הכרעת נוסחאות אלה היא פשוטה ביותר.

<u>סיכום</u>

ראינו, כאמור, את התגלגלותו של הרעיון המתמטי בדבר כריעות הגיאומטריה האוקלידית של המישור כתהליך שהתחיל בתובנה של דקארט מהמאה ה-17 ונסתיים במאה ה-20 עם משפטו של טרסקי. עמדנו על תהליך המעבר מהגיאומטריה של המישור לאלגברה דרך האלגוריתם של דקארט, חסרונותיו, יתרונותיו וכיצד נפתרים הקשיים בהם נתקל דקארט, בידי אלפרד טרסקי, בתוך המסגרת של הלוגיקה המודרנית עד לפיתוחה של שיטת הכרעה מלאה לגיאומטריה.