

האוניברסיטה העברית בירושלים
הפקולטה למתימטיקה ולמדעי הטבע
החוג למתימטיקה

ג'ורג' קנטור

הרעיונות הראשוניים שהטמיע במתימטיקה
והביקורות בנות זמנו כלפיהם

עבודת במסגרת הקורס "תולדות המתימטיקה"
מוגשת לפרופ' אהוד הרושובסקי

מגישה: דליה אולינסקי
ת.ז. 061504395

אוגוסט 2005

הקדמה

אני לומדת מתימטיקה באוני' מזה שנתיים. במהלך הקורסים, ישנם שמות של מתמטיקאים שחוזרים בהקשרים שונים – הגדרות ומשפטים שהם הגו, או הוכיחו, או שנקראו על שמם. הקורסים עוסקים במתימ' במהותה, אך לא אחת יצא לי לתהות באשר לשאלה: מי עומד מאחורי השמות הגדולים הללו? בספרים מידי פעם כתובה שורה על אודות מתמטיקאי, אך סקרנותי הייתה רבה יותר. במיוחד התעוררו אצלי שאלות לגבי ג'ורג' קנטור. לראשונה נתקלתי בשמו בקורס חשבון אינפי' 1 (בהקשר של רציפות הרציונלים) ובהמשך בקורסים נוספים, בעיקר בהקשר של תורת הקבוצות. בין היתר, על הדמות, שמעתי לא אחת שהוא זה שהטביע את סימון ע"י האות ל' בתוך המתימ' (דבר שהנחתי שנבע אולי מקשר חזק למוצא יהודי הנחה שהתבדתה), וכן שאיבד את שפיותו, ככל הנראה מהעיסוק החלוצי במושג האינסוף (דבר שאף הוא לא מדויק, כפי שיתברר בהמשך). במסגרת הקורס "תולדות המתימטיקה" נתבקשנו לכתוב עבודה. שמחתי על האפשרות ובחרתי בדמות: ג'ורג' קנטור.

אני מאמינה שהביוגרפיה של מתמטיקאי ואופיו, בעיקר כשמדובר באדם יצירתי, יכולים להשליך רבות על טבע התגליות האינטלקטואליות שלו. בהמשך גיליתי שבמקרה של קנטור הדבר נכון במיוחד.



הבחירה במתימטיקה

Georg (Ferdinand Ludwig Philip) Cantor נולד ב-3 למרץ 1845, בסיינט פטרסבורג, רוסיה. אביו ג'ורג' וולדמר קנטור, סוחר מוצלח יליד קופנהגן, דנמרק, שמשפחתו היגרה לרוסיה. האב זכה לחינוך אוונגליסטי לותרני. הוא נישא למריה אנה בוהם, בת למשפחה רומית קתולית וכישרונית מאוד מבחינה מוזיקלית.

לזוג נולדו שישה ילדים, כשהבכור בהם הוא ג'ורג' קנטור. בשנת 1856, עקב מצבו הבריאותי המדורדר של האב, עברה המשפחה לגרמניה. בתעודת סיום בי"ס של הבן הבכור נכתב: "חריצות ודבקות מופתיים; הידע שלו במתימ' ובכלל זה גיאומטריה טוב מאוד, ראויים לשבח". שנה לאחר מכן, בבי"ס מקצועי, זכה לשבחים הגבוהים ביותר: "...הוכיח עצמו כתלמיד מוכשר וקפדן".

קנטור האב התעניין מאוד בלימודי בנו ועודד אותו למצוינות. הוא אומנם העדיף שילמד הנדסה, אך לבסוף הסכים שיעסוק בתיאוריה, דבר שקנטור אשר העריך מאוד את אביו ורכש לו כבוד רב היה אסיר תודה לו (*My dear papa! You can realize for yourself how greatly your letter "delighted me. The letter fixes my future..."*). ייתכן שרצון אביו בכך שילמד הנדסה גרם לו לחוסר ביטחון שבא לידי ביטוי בהמשך בעימותים מול מתנגדיו.

אביו גם דרבן אותו להרחיב אופקים ולא רק להתמקד בתחום יחיד, דבר שניכר בשנים המאוחרות יותר בחייו וכן בכך שצייר וניגן בשעות הפנאי.

במהלך חייו קיבל קנטור מכתבים מאביו, בהם מודגשות הוראות דתיות נחרצות, אותן לקח קנטור ברצינות רבה. ביניהן, מכתב אחד שנשא עימו קנטור לכל מקום, ובו באים לידי ביטוי גורמים שהיוו חלק מרכזי באישיותו בהמשך: אמונה דתית בכוונה לסייע לאדם בשעות קשות, הביטחון בכך שאלו שכשלו בחייהם היו חסרי נפש חזקה, והאמונה שרוח הדת צריכה לשכון באינדיבידואל.

אביו נפטר משחפת בשנת 1863, והותיר בבנו הבכור את השאיפה למצוינות מקצועית ואמונה במקורות הפנימיים שלו, ויותר מכל הרצון לא לאכזב את אביו. השפעת אביו משליכה רבות על נחישות קנטור הבן, עקשנותו וביטחונו בתיאוריה שפיתח.

קובץ מהרעיונות המתימטיים הראשוניים של קנטור

ג'ורג' קנטור למד לתואר ראשון במתימטיקה, פילוסופיה ופיסיקה באוניברסיטת ברלין. בין מוריו היו כמה מבין השמות הבולטים במדע המתימ' באותה תקופה: E.Kummer, K.Weierstrass, L.Kronecker. בברלין היה קנטור מעורב מאוד בחברה המתמטית ואף היה לנשיא שלה (1865-1864). את עבודת הדוקטורט שלו עשה בתחום תורת המספרים.

משסיים קנטור את הדוקטורט (1867) לימד בבי"ס מקומי של בנות בברלין. בשנת 1868 לקח חלק בסמינר Schellbach היוקרתי.

קעבור שנתיים מסיום הדוקטורט קיבל מישרה באונ' Halle (בתחילה רק להוראה ובהמשך קודם), מוסד מקובל אך לא מהשורה הראשונה. בין הקולגות שלו נמנה גם המתמטיקאי H.E.Heine. האהבה הראשונה של קנטור הייתה תורת המספרים הגאומטרית, בה מצא עניין הודות לפרפקציוניזם החד והברור שניכר בהוכחות. מכאן, תחת השפעת וירשטראס והיינה, הוא נמשך לענף הקפדני של האנליזה, במיוחד לתיאוריה העוסקת בטורים טריגונומטריים (טורי פורייה). קנטור פתר את בעיית יחידות ההצגה שהיינה, דיריכלה, ליפשיץ ורימן התחבטו בה ולא הצליחו לפצחה, והראה שאם ניתן להציג פונקציה f בצורה $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ אזי ההצגה יחידה, הוכחה שראתה אור בשנת 1872.

משם המשיך קנטור לחקירת ה"רציפות". כמוהו הסתקן בכך גם R.Dedekind והשניים התכתבו וחלקו מידע רב. אחת מבין הסוגיות המרכזיות שהטרידו אותם: נראה היה שהמספרים הממשיים הרבה יותר עשירים מהרציונלים בכמותם ובתכונותיהם. האי רציונלים הצליחו למלא את הרווחים, והתעלו על הרציונלים גם בשלמות ובהמשכיות. מה, אם כן, אחראי להבדל הטבוע הזה? בסוף שנת 1873 מצא קנטור את התשובה: לא ניתן לבנות התאמה חד חד ערכית בין המספרים הטבעיים \mathbb{N} לממשיים \mathbb{R} (כלומר הממשיים אינם בני מניה). הוא פיתח הוכחה לכך (באמצעות מה שמכונה אחריה "שיטת האלכסון של קנטור") וזו התפרסמה במאמר בן שלושה עמודים בלבד ב *Crelle's Journal*, 1874. וירשטראס, מתומכי קנטור הנלהבים, הוא שדחף אותו לפרסום הני"ל. מההוכחה הזו עולה לראשונה קיום גדלים שונים של אינסוף. בהמשך לכך הראה קנטור שכל קטע שבו יותר מנקודה איננו בן מניה.

באוגוסט אותה שנה נישא קנטור לזואלי גוטמן ובהמשך נולדו להם שני בנים וארבע בנות – אף לא אחד מהם ירש מאביו את הכישרון למתימ'. במשפחתו שלו קנטור לא הרגיש כל צורך להוכיח עצמו, אך היה לו צורך שיאהבוהו ויתנו לו תשומת לב.

בשנת 1877 הצליח קנטור להוכיח שקיימת התאמה חח"ע בין הנקודות בקטע $[0,1]$ למרחב ה- n מימדי. קנטור בעצמו נדהם מהתגלית, שנגדה את האינטואיציה, וכתב: "אני רואה זאת אך איני מאמין!". כשמלאו לו 40 שנה לקה קנטור בהתקף דיכאון ראשון מבין רבים שהמשיכו לתקוף אותו עד אחרון ימיו. בזמנו נראה היה שזה קרה לו עקב קשיים שחווה בקריירה (תככים, המחקר, קידום, אונ' Halle וכו') אך כיום מסתבר שכנראה הייתה זו מאניה דיפרסיה, כלומר הסיבה גנטית בעיקרה. כמה מהמצאותיו הגדולות ביותר נעשו בין התקף אחד לאחר. כשסיים עם ההתקף הראשון (שארך כחודש) כתב כי הוא חסר אנרגיות ועניין לחזור למתימ' הקפדנית. הוא טען שאיננו כשיר לעסוק במדע ולכן פנה להוראתו. באותם שנים הוא התחבט מאוד בניסיון להכריע את השערת הרצף (שעוצמת הממשיים = ^{עצמת} _{הטבעיים} 2), באיזשהו שלב חשב שהוכיח אותה אך לאחר מכן מצא בעיה בהוכחה, דבר שתרם אף הוא

לתחושת המרמור. בשנים הבאות (1885-1891) נראה שפרסומיו הוקדשו בעיקר לפילוסופיה. עקב התנגדויות והתנכלויות רבות שנחלה הקריירה שלו בגרמניה, העדיף קנטור לעבור להצדיק את הפילו' שלו, משימה לא פשוטה. למרות ה"נטישה" הוא נותר נאמן למתימ' – בפועל רק המעיט בפרסומים בה.

בהמשך ייסד קנטור קהילה מדעית גרמנית (DMV), כזו שקיווה שתהיה חופשית מביקורת. יש הרואים אותה כתוצר מאבק בשם המדע, המכוון כנגד העמדות האיתנות שבקרב קבוצת מתימטיקאים בולטים בזמנו, וכביטוי למה שכתב קנטור לא פעם: "The essence of mathematics is its freedom". צעירים התלהבו מקנטור ורעיונותיו, והלה קיווה להקנות להם תמיכה שלא ניתנה לו. קנטור לא עזב את אונ' Halle היות שלא התקבל לאף אונ' מוכבדת יותר עקב האשם האנטי-אינסוף, חווה תככים וחוסר הערכה (כן כלכלית וכן אפלייתית – היות שלא היה גרמני במוצאו), פרסומים רבים שלו עוכבו והוא הסתכסך עם עורכי עיתונים שונים. בנחישות ואמונה בתורתו, נחרץ גרלו ע"י המתמטיקאים הבולטים בברלין. בגיליון הראשון של הארגון פרסם קנטור מאמר משלו, ולכן סביר שהאינטרסים שלו קדמו לכל. קנטור גם פעל רבות לקידום הרעיון של כינוס קונגרס בינ"ל למתימ'.

השערת גולדבך (כל מס' זוגי הוא סכום של שני ראשוניים) הייתה (ועודנה) חידה גדולה מאוד. בשנת 1894 פרסם קנטור מאמר מאוד משונה, בו הראה את נכונות ההשערה לכל המס' (הזוגיים) עד 1000. זהו אקט תמוה למדיי היות שכארבעים שנה קודם לכן הוכחה נכונותה לכל הזוגיים עד 10000. הדבר מראה על השקפה שהייתה נהוגה אז כניסיון לפתרון: גם אם כשלו בניסיון למצוא "פיתרון גורף", חיפשו חוקיות ע"י בדיקה פרטנית. אך, מעבר לכך, דומני שפעולה זו מעידה על מצבו הנפשי של קנטור.

בשנת 1891 פרסם קנטור את המשפט הידוע מתוה"ק לפיו מס' קרדינלי של קבוצה קטן מקבוצת כל תתי הקבוצות שלה (כלומר, באופן שקול, לכל קבוצה α : $\alpha < P(\alpha)$).

בשנים 1895 ו 1897 פרסם קנטור שני מאמרים^[3] מאוד מפורסמים ומרכזיים בהם למעשה הותווה הבסיס האיתן והמקיף ביותר של תורת הקבוצות ומה שקנטור כינה "אריתמטיקה של מספרים אינסופיים", כשבראשון שבהם עלה לראשונה הסימון ע"י האות אלף העברית.

אלף אפס \aleph_0

הסימון \aleph_0 הוצהר ע"י קנטור במאמרו "תרומות להקמת תיאורית המספרים הטרנספיניטיים"^[3] לשם ציון הקרדינל הטרנספיניטי (העוצמה האינסופית) הקטן ביותר.

הבחירה באות אלף באה היות שחשב שהאלפיתים היווני והרומי כבר זכו לשימוש ניכר למטרות שונות, והמספרים החדשים שלו ראויים למשהו שונה וייחודי. האות אלף כבר הייתה בנמצא בפונטים של המדפסות הגרמניות. הייתה זו בחירה חכמה. האות אלף היא האות הראשונה במילה "אינסוף", שהקבליסטים משתמשים בה במשמעות "אלוהות". בנוסף, טבעי לקשר את מושג האינסוף עם מיסטיקה, מסתוריות. הקבלה היא המיסטיקה היהודית, ומשתמשת בגימטריה כבר מזה דורות רבים. בגימטריה, האות אלף (היא האות הראשונה באלפבית העברי) מסמנת את המספר 1. כיוון שהקרדינלים הטרנספיניטיים בעצמם היו יחידות אינסופיות, אלף יכולה הייתה להיחשב כמייצגת התחלה חדשה למתימ' וקנטור בהחלט האמין שהתיאוריה שלו היא כזו.

בפועל, בכתבי קנטור מופיע הנימוק: "נראה לי שלמטרה זו מערכות אלפבית אחרות היו בשימוש נרחב מדי". דאובן^[4] כתב שקנטור תמיד היה זהיר בסימונים, ומופיעה ביקורת חיובית על הבחירה הנ"ל: "The choice was especially clever."

חשוב לציין שאומנם לקורא בשפה העברית ייתכן שהאות לא מסמנת פליאה רבה, אך היות שקנטור פרסם מאמריו בגרמנית, וגם כיום רוב המאמרים המדעיים לא מתפרסמים בעברית, יש בסימון זה מן ההפתעה.

השפעת האמונה על חיי קנטור

קנטור חונך בצורה דתית. אביו הנחיל בו את האמונה, ורבות מנחישותו של קנטור בנכונות דרכו נבעה מכך שהאמין בהיותו נביא, שליח שבחר האל להביא את אמיתות תוה"ק לקהל הנרחב. כשהיה מאושפז בגלמודיות בבי"ח פסיכיאטרי טען לתקרית בה דימה מזה שקולה אישר לו נכונותה האבסולוטית של תוה"ק. בעקבות המאורע חש שאיננו רק מדווח, מודיע, ממיר התורה אלא הוא ממש שגריר שלה. בתוקף כך, כתב אפילו מכתב לאפיפיור על אודותיה. האל נתן לו את התורה וכל שנותר לו, טען קנטור, הוא הניסוח. הוא היה משוכנע שיצליח להביא להכרה שהגיעה לה. בהתבטאויות על החופש הפנימי של המתימ', קידם קנטור אלמנט של נחיצות אינטלקטואלית: "על המיינד לשאוף אל האמת, יהיה אשר יהיה המקום אליו זו תוביל. יש לעודד השראה ולא לבטלה ע"י ביטוי של דיעות קדומות". נראה שאופוזיציות כלפיו חיזקו את נחישותו, רבות מכך הודות לתחושת השליחות. האל היה מקור השראה וההבטחה לנחיצות נכונות המחקר שלו; הביטחון ביכולות האל שלקח חלק בהגדרת הסטטוס האונתולוגי של האינסוף.

קנטור האמין שקיומו של האינסוף משליך על הטבע האינסופי של קיום האל. קנטור אף יצר שני טיעונים מהם קיום מספרים טרנספיניטיים יכול להיות מוסק בשתי דרכים משלימות:

1) על רקע אפריורי – שהקונצפט של האל הוביל ישירות למושגותיו ובכך ליכולתו ליצור את הטרנספיניטום; כלומר בהינתן שהאל קיים, מהגדרתו הוא מושלם, ובכלל זה כל יכול. מכאן שביכולתו לייצר כל דבר, ובכלל זה גם אינסוף.

2) על רקע אפוסטריורי – נניח שטרנספיניטום קיים. כעת, אם נשתמש במספר אינסופי של טיעונים להסברת תופעה טבעית, לעולם לא נגיעה לנקודת עצירה. מכאן שאנו נחוצים למשהו שיעצור את התהליך ומכאן הצורך באל. נאלצים לסיים את הרדוקציה, כלומר אנו זקוקים לקיומו.

הוא טען גם שאל אינסופי מוכיח את קיום האינסוף: "היות שהאל הוא הדבר המושלם ביותר, ניתן להסיק שביכולתו ליצור מימוש של האינסוף. לכן, בישות טוב ליבו וכבודו ניתן להסיק שהוא אכן יצר אינסופיות".

קנטור כתב שהוא אסיר תודה לאל אפילו על כך שלא קודם לאונ' ממעמד גבוה יותר ורואה זאת כחלק מהסיבה שנגרר לעיסוק מאוחר יותר בפילו' ובתיאולוגיה.

משפט הסדר הטוב, השקול לאקסיומת הבחירה, היה גם הוא על סדר היום. קנטור אימץ אותו כיוון שהאמין שביכולתו של האל, הקיים לפיו, לסדר אלמנטים היטב.

את המעבר לפילו' נימק גם כהשראה מלמעלה. האל הביאו לנטישת עולם המתימ' לטובת הפילו', דבר שחידש את ההשראה והביטחון העצמי בצדקת התורה שהביא (על אף שהרגיש שהמתמטיקאים כשלו להבין זאת).

ההתייחסות הפילוסופית של קנטור למהות האינסוף

קנטור הכיר את הפילוסופיה כבר מהתואר הראשון שעשה, וראה בעיסוק בהיבטים הפילוסופיים של התורה המתמטית שהעלה הכרחי. הוא קיווה שתורתו תסייע להבנת תופעות פיסיקליות. העיסוק המעמיק בפילו' הגיע בגיל מבוגר יותר, כשהרגיש קנטור שאיננו צלול יותר לעסוק במדע מדויק. הוא מאוד נהנה מהפילו', ובשלב מסוים התחנן לרשויות אוניברסיטת Halle להעבירו מהמשרה כפרופסור במחלקה למתימ' לטובת משרה במחלקה לפילו'.

הרוב הגדול של הפילוסופים בתקופתו החזיק בתפיסה שהמשיכה מאז ימי אריסטו, אשר מתנגדת נחרצות למושג האינסוף. המתמטיקאים נטו גם הם לרשת גישה זו, בתמיכת אי העקביות שבה נתקלו. קנטור ראה את אמונתם הזו כדוגמה ברוח ימי הביניים, שמקורה כאמור בגישה האריסטוטלית. דוגמה לסיבה שעודדה אותם לדחות את המספרים האינסופיים: לכל שני קבועים $0 < a, b$ מתקיים $b < a + b$. אך, $a + \infty = \infty$, דבר שסתר את האופן שבו על המספרים להתנהג. קנטור התמודד עם כך באומרו שתהיה זו טעות לחשוב שמספר אורדינלי אינסופי חייב לציית לחוקים האריתמטיים להם כפופים המספרים הסופיים.

תוך הצדקת עמדתו, חקר קנטור את גישותיהם של ההוגים המרשימים ביותר של המאה ה-17 (Locke, Decartes, Spinoza, Leibniz, Bolzano ועוד). אלו העלו את הטענות הכי מבוססות כנגד האינסוף, ולכן במתן מענה להן חשב שיהיה ביכולתו לתת תשובות לכל. הוודאי, לטענתם, הוא סופי לפי הגדרה. הוא מצא בטענותיהם מעגליות. בכתבי לייבניץ מצא גם כמה אלמנטים שתרגם לטובתו (דוגמת חלוקה לאינסוף מוחלט ואינסוף עכשווי). הוא עשה גם שימוש בכתבי בולצנו, שהתעמתו עם פרדוקסים בנושא.

קנטור ניסה להראות נחיצות קיומו של האינסוף במגוון דרכים. מבחינה אונטולוגית טען שהאי רציונלים והאינסופיים – שניהם בעלי סטטוס אונטולוגי זהה, ומכאן שלא ניתן לקבל אחד ולהתנגד לשני.

ביקורת בזמנו של קנטור

ההיסטוריה שפטה את ג'ורג' קנטור כאחד המתמטיקאים המקוריים והחשובים ביותר בכל הזמנים. פיתוחיו, בעיקר באריתמטיקת המס' האינסופיים, הייתה ברובה חלוצית וייסודה של תורה חדשה. בתוך כך, זכה קנטור לביקורות רבות – בהן תומכים ולא מעט מתנגדים וכאלו שהעלו פרדוקסים שונים בהתייחס לתורתו.

בין התומכים הנלהבים ביותר של קנטור היה C.Hermite. קבלתו האוהדת לדוקטרינה החדשה חיממה מאוד את ליבו של קנטור, ועדויות לכך ניתן למצוא גם בכתבי קנטור, שבאחד מהם רשם: "השבחים שהרמיט מרעיף עליי במכתב זה... בנושא התיאוריה של תורת הקבוצות, כ"כ משמעותיים בעיניי, כ"כ לא ראויים, כך שכדאי שאפרסם אותם בכדי שלא אשקע באשמה עצמית על כך שאני נפעם מהם".

D.Hilbert התייחס לדיון במתימ' המודרנית שהגה קנטור: "...פרי המיינד ובהחלט אחד ההישגים הגבוהים ביותר בתהליכים האינטלקטואליים של האדם". בנוסף, על אף שהודה שהפרדוקסים שהעלו C.Burali-Forti, B.Russell לא נראים לו כברי פתרון, עדין האמון שלו עולה על כל ספק כפי שכתב באחד המשפטים התומכים ביותר שבהם נתקלת: "No one shall expel us from the paradise which Cantor has created for us".

כשהגיעו השמועות על מצבו הרע של קנטור שאושפז במוסד לחולי נפש, ונראה עייף, פאסיבי וחסר התלהבות, כתב E.Landau לואלי גוטמן (אשת קנטור) שקנטור וכל שייצג לעולם לא ימות ושעלינו להיות אסירי תודה על כך שקנטור ניתן לאנושות, ושהדורות הבאים ילמדו ש"הוא תמיד ישאר חי וקיים". טרם נפטר B.Russell, כינה את קנטור כאחד השכלתנים הטובים של המאה ה-19. G.Kowalewski תיאר את קנטור כמתבלט, עם משמעות נעלה ואופי יוצא דופן. הוא העריך מאוד את מגוון ועומק תחומי העניין שלו.

באפריל 1870 הביע H.A.Schwarz דברי עידוד ופרגון בהתייחס להתמודדות קנטור עם בעיית יחידות ההצגה. הוא הביע סיפוק רב מכך שוירשטראס, שעבר על ההוכחה, מצא אותה כנכונה לחלוטין, וציין כי היא התקדמות משמעותית בתיאורית הטורים הטריגונומטריים, המשמחת אותו אפילו יותר מאשר אילו היה מגלה אותה בעצמו.

M.Simon היה מתמטיקאי שהילל את קנטור גדולות באופן משבח וחברי על עשיית תרומה חשובה כן לפילו' וכן לביסוס האריתמטיקה, ובתוך כך כתב שהסיגניפיקנטיות של העבודה הצדיקה בחינה חוזרת ומקיפה. הוא קיבל את האריתמטיקה של קנטור בצייתנות מלאה. מנגד, הוא הטיל ספק בהיבטים הפילוסופיים של תורתו אך בעיניו המתים' היא זו שנחשבה.

גם G.Mittag-Leffer השבדי נקט בעמדה דומה. דבר זה נובע בבירור מכך שכאשר בחר קטעים מעבודת קנטור לתרגום לעיתון הצרפתי החדש "Acta Mathematica" שבראשו עמד, השמיט את כל החלקים הדנים בהיבטים פילוסופיים. הוא ראה אותם כלא חשובים, ועשה זאת למען אלו שהיו מוכנים לקבל את הרעיונות המתמטיים אך ימצאו את אלו הפילוסופיים בלתי מתקבלים על הדעת (דבר שכנראה הזדהה איתו בעצמו). לפר היה מכותב של קנטור כבר תקופה לא קצרה אך כשקרתה התקרית (הצנזור לטובת הגרסה הצרפתית, 1885) הנימוק של לפר -שקנטור הגיע להוכחה כמאה כשנה מוקדם מידי- לא שכנע את קנטור. הוא נפגע מאוד, דבר שהביא לקטיעת הקשר בין השניים. ראוי לציין שאקט זה מעיד גם על אופיו הפגיע והנחרץ של קנטור, דבר שמתבהר על רקע העובדה שלפר היה מאנשי הסוד הגדולים שלו. גם הקשר עם דדיקינד נפסק עקב פעולה שפירש קנטור כאישית נגדו: הוא הזמין את דדיקינד להתמנות למשרה באוניברסיטת Halle (בה עבד) ונענה בסירוב.

לפי בל^[2], עבודת הדוקטורט של קנטור לא גרמה לקוראיה לחשוב שהכותב יזכה בגדולות, הכישרון בלט אך לא הגאונות.

המתמטיקאי הצרפתי הנודע H.Poincare ראה את תורת המספרים האינסופיים כלא פחות מאשר מחלה, והיה משוכנע שהמתמטיקאים יירפאו ממנה בעתיד.

ראוי לציין שקנטור נתן תימוכין חזקים לטענותיו המתמטיות, פילוסופיות ותיאולוגיות גם כן, שרבות מהן נגדו אפילו את האינטואיציה שלו עצמו הייתה טרם זאת; לכן הוא צפה הרבה מתגובות הנגד מראש והתעמת איתן טרם נפגש עם המתנגדים.

קנטור וקרונקר

כאמור, חיי קנטור האישיים לא היו שופעי שמחה. נראה שהיריבות הטראגית ביותר, ועילה מרכזית למריחות דרכו, הינה היריבות עם L.Kronecker שהיה אחד המתמטיקאים הבולטים בברלין וניחן באופי קונסרבטיבי. היריבות בינם השפיעה על קנטור רבות, תוך שהייתה כן מתמטית, כפי שנראה להלן, וכן אישית - יש עדויות לכך שכינה אותו כ"שרלטן מדעי", "בוגד" ו"משחית נוער". עד היום לא הושג אף ניצחון חד משמעי של אי אילו מהצדדים.

קנטור לקח הרבה מכך באופן אישי, ולא מעט מבקרים רואים יריבות זו כגורם מרכזי לכך שיצא מדעתו.

כששב קנטור מחופשה לאחר התקף השיגעון הראשון, הוא כתב לקרונקר מכתב שהיווה ניסיון פיוס בין השניים. אומנם הוא נענה באופן חיובי, אך הניסיון הנ"ל לשלום לא החזיק מעמד לזמן רב. קרונקר היה אחד ממוריו של קנטור עוד כשהיה קנטור סטודנט באוני' ברלין. כפרופסור שלו, קרונקר הילל את עבודתו בתחום תורת המספרים ואף הציע מודיפיקציה יעילה לגרסה הראשונה של הפתרון שהעלה קנטור לבעיית יחידות ההצגה.

המאמר המהפכני שפרסם קנטור בשנת 1874 זכה לכותרת "On a Property of the Collection of All Real Algebraic Number". היא לא קשורה לנקודה המרכזית שהועלתה במאמר. קנטור נימק זאת כ"עקב התנאים בברלין", דבר שלא הובהר מאז. ייתכן מאוד שהדבר קרה כיוון שקרונקר היה בצוות העורכים, ועקב היות הלה שמרני קנטור צפה את התנגדותו וחשש מפסילת המאמר מפרסום. חשד זה איננו תלוש מהמציאות לאור העובדה שמספר שנים לפני כן ניסה קרונקר (אם כי ללא הצלחה) להטות את היינה, קולגה של קנטור, מפרסום מאמר על טורים טריגונומטריים באותו עיתון.

מן המאמר עולה גם שכמות המספרים הטרנסצנדנטיים גדולה מכמות הטבעיים. קרונקר לא ראה בכך כל משמעות, היות שלטענתו המספרים האי רציונלים (ובתוך כך הטרנסצנדנטיים) לא קיימים. קרונקר התנגד לאלמנטים רבים שהופיעו בהוכחות של קנטור, והתייחס אליהן כאיוולת מתמטית.

מיוחס לקרונקר חלק גדול מהאחריות לאי יכולתו של קנטור להשיג את המשורה הנחשקת באוני' בברלין. קרונקר ביקר את ג'ורג' קנטור אפילו מול תלמידיו (!). מקובל אומנם לתת ביקורת בכתיבה מדעית אך קרונקר, כאמור, הגיע מעבר לכך. זהו דבר שלחלוטין איננו מקובל, בעיקר בעטיו קנטור תלמיד שלו בתחילת דרכו.

גם כלפי ויירשטראס נהג קרונקר באופן חריף ותקיף. ככלל הוא ידוע כאחד הלוחמים המתחרים ביותר בהיסטוריה של המחלוקות המדעיות.

פרדוקסים

ככל הנראה, הפרדוקסים הראשונים שהועלו לתורת קנטור היו כאלו שמצא הוא עצמו מסתירות שעלו מהרעיון של אורדינל או מספר קרדינלי הכי גדול. לבד מאלו, הפרדוקס הראשון שנמצא בתוה"ק התגלה ע"י C.Burali-Forti, בשנת 1897. הוא נוסח תוך שימוש במושגים טכניים אך למעשה מצטמצם לרעיון הבעייתיות של קיום "קבוצת כל הקבוצות", אותו ביסס בהרחבה B.Russell שש שנים מאוחר יותר. האחרון, למרות הערכתו הרבה לקנטור, מצא את אחד הפרדוקסים החשובים והידועים ביותר - הבעיה עם קיום של קבוצת כל הקבוצות המכילות את עצמן, האם היא מכילה את עצמה? - דבר שהראה שיש משהו יסודי שגוי בהגדרה של קנטור ל"קבוצה". הדיון בפרדוקס והשלכותיו הורחבו במאה ה-20. שקנטור הוצף בכמות לא מבוטלת של פרדוקסים וכבר לא יכל להעלים עין, דרכו להתעמת איתם הייתה בעיקרה באומרו שהקבוצות שנמצאו כבעייתיות – אין להכלילן בתוה"ק ויש למנוע כניסתן אליה. המענה הנ"ל לפרדוקסים איננו מספק ומאוד שנוי במחלוקת.

סוף דבר

בהמשך חייו נתקל קנטור בפרדוקסים רבים וניסיונות לסתור את נכונות דרכו. הוא פנה להיסטוריה, ספרות (להוכחת הטענה שהטקסטים של שייקספיר אינם מקוריים), תיאולוגיה ועיסוק בהשלכות הפילוסופיות של האינסוף. בשנת 1913 יצא לגמלאות. הוא אושפז בקליניקה לחולי נפש בפעם האחרונה במאי 1917 ולא הורשה לצאת למרות רצונו העז להשתחרר. ב-6.1.1918 הוא נפטר מהתקף לב והשאיר אחרי הרבה ביוגרפיות רבות נכתבו על קנטור וכן ספרי מתימ' לא מעטים. מפאת קוצר היריעה, היה עליי להצטמצם. בתוך כך, מצאתי למרות זאת לנכון להקדיש חלק מרכזי לביקורת נגדו, היות שהוא עסק במושג "אינסוף" אשר היה מהפכני בצורה יוצאת דופן ועורר ביקורת רבה, תוך שהיווה בסיס גדול לתחומים מרכזיים במתימ' הקיימת כיום. לצערי, נבצר ממני מלהרחיב רבות על התכנים המתמטיים אותם תרם קנטור למדע. אלו נלמדים, בכל קורס בהקשרו, לעומקם ואינם ראויים לסיקור שטחי. היה לי מסקרן מאוד לכתוב את העבודה והקריאה הרבה, ונהניתי מההזדמנות לבצע. כולי תקווה שסקרנותי והעניין הרב שמצאתי בה הצליחו להיות מועברים גם לקורא אותה.

ביבליוגרפיה

- [1] Anglin, W.S. "Mathematics: A concise History and Philosophy", New York: Springer, 1994.
- [2] Bell, E.T. "Men of mathematics", New York: Simon and Schuster, 1937.
- [3] Cantor, George. "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers", New York: Dover publications, 1941.
- [4] Dauben, Joseph Warren. "Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite", New Jersey: Princeton University Press, 1991.
- [5] Eves, Howard Whitley. "Great moments in Mathematics (After 1650)", Washington D.C: Mathematical Association of America, 1981.
- [6] Huntington, Edward Vermilye. "The continuum, and other types of serial order", New York: Dover publications, 1955.
- [7] Kramer, Edna Ernestine. "The main stream of Mathematics", New York: Oxford University Press, 1951.
- [8] Maor, Eli. "To infinity and beyond: a cultural history of the infinite", Boston: Birkhauser, 1987.
- [9] Dauben, Joseph Warren. "Association of Christians in the Mathematical Sciences". "Georg Cantor and the battle for transfinite set theory". <<http://www.acmsonline.org/Dauben-Cantor.pdf>> Accessed: 2005, Aug. 7.
- [10] University of St Andrews. The MacTutor History of Mathematics Archive. <<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>> Accessed: 2005, Aug. 12.