הבעיה ה־17 של הילברט ומידת $Loeb$:

הגדרה:
תורה עקבית T תקרא שלמה מודלית, אם לכל שני מודלים של T: $\mathcal{A},\mathcal{B}$ אם: $\mathcal{A}$ תת מודל של־ $\mathcal{B}$, אזי הוא תת מודל אלמנטרי.

דוגמא:
למי שהיה בקורס בסימסטר הקודם: כל השלמה מודלית של תורה, היא תורה שלמה מודלית על פי הגדרתה. לכן יש לנו כבר לא מעט דוגמאות לתורות שלמות מודלית.

הערה 2:
אין קשר ישיר בין שלמות מודלית לבין שלמות. לדוגמא: נסתכל על התורה של: $(\mathbb{N},<)$ אזי זו תורה שלמה אבל היא אינה שלמה מודלית, הוכחה:
נסתכל על המודל $\{0\}\cup\mathbb{N}$ (עם הסדר כך ש: 0 קטן מכל איבר) אזי זהו מודל של התורה ו־ $(\mathbb{N},<)$ זהו תת מודל, אך הוא אינו תת מודל אלמנטרי
(יהא: $\phi(y)=\forall x(x>y)$ אזי מתקיים: $\mathbb{N}\vDash\phi(1)$ אבל: $\{0\}\cup\mathbb{N}\nvDash\phi(1)$)
כמו כן: ACF זו תורה שלמה מודלית ($hilbert\, nullstellensatz$)
אבל ACF אינה תורה שלמה (לדוגמא עבור שדה סגור אלגבית ממציין ממציין 2 ; F מתקיים: $F\vDash\forall x(x+x=0)$ אבל לא מתקיים: $\mathbb{C}\vDash\forall x(x+x=0)$)

טענה:
אם ב־ T יש חילוץ כמתים אזי T שלמה מודלית.
הוכחה:
יהיו $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מודלים של T ו־ $\mathcal{A}$ תת מודל של־ $\mathcal{B}$ נראה כי הוא תת מודל אלמנטרי:
ראשית נראה כי לכל פסוק חסר כמתים $\theta(x_1,..,x_n)$ ולכל $a_1,..,a_n\in\mathcal{A}$ מתקיים כי:
$\mathcal{A}\vDash\theta(a_1,..,a_n)\iff\mathcal{B}\vDash\theta(a_1,..,a_n)$
באינדוקציה על הפסוק:
אם $\theta(x_1,..,x_n)=R(t_1(x_1,..,x_n),..,t_m(x_1,..,x_n))$ נוסחא אטומית, אזי:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\ \vDash\ & R(t_1(a_1,..,a_n),..,t_m(a_1,..,a_n))\iff(t_1(a_1,..,a_n),..,t_m(a_1,..,a_n))\in R^A\iff\\ & (t_1(a_1,..,a_n),..,t_m(a_1,..,a_n))\in R^B\iff\mathcal{B}\vDash\theta(a_1,..,a_n)\end{aligned}$$

צעד:
אם: $\theta(x_1,..,x_n)=\sim\psi(x_1,..,x_n)$ אזי:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\ \vDash\ & \phi(a_1,..,a_n)\iff\mathcal{A}\nvDash\psi(a_1,..,a_n)\iff\mathcal{B}\nvDash\psi(a_1,..,a_n)\iff\\ & B\vDash\phi(a_1,..,a_n)\end{aligned}$$

ובאותו אופן עבור הקשר: $\to$.
$\square$
כעת נראה כי $\mathcal{A}$ תת מודל אלמנטרי:
תהא $\phi(x_1,..,x_n)$ נוסחא. אזי ב־ T יש חילוץ כמתים לכן קיימת נוסחא חסרת כמתים: θ כך ש: $T\vdash\forall x_1,..,x_n(\phi(x_1,..,x_n)\leftrightarrow\theta(x_1,..,x_n))$

לכן לכל: $a_1,..,a_n \in A$ מתקיים כי:
$\mathcal{A} \vDash \phi(a_1,..,a_n) \iff \mathcal{A} \vDash \theta(a_1,..,a_n) \iff \mathcal{B} \vDash \theta(a_1,..,a_n) \iff \mathcal{B} \vDash \phi(a_1,..,a_n)$
כלומר $\mathcal{A}$ תת מודל אלמנטרי.

נחזור כעת לשדות סגורים ממשית:

למה1 :
יהא: F שדה פורמלי ממשי, אזי לכל סדר $<$ על F מתקיים כי: $a > 0$ אמ"מ קיימים $b_1,..,b_n \in F$ כך ש: $a = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$
הוכחה:
מתקיים כי: $\cap_{P\,positive\,cone} P = E_F$ (כך ש: $E_F = \{a \in F \,|\, \exists b_i\, a = \sum_i b_i\}$
כמו כן ראינו בשיעור הקודם כי כל סדר על $<$ מגדיר קונוס חיובי (ע"י $P = \{a \,|\, a > 0\}$, ולהיפך כל קונוס חיובי מגדיר סדר ע"י: $x - y \in P \iff x > y$.
לכן אם $a \in E_F$ אזי לכל סדר: $<$ על F מתקיים $a > 0$, ולהיפך אם $a \notin E_F$ אזי קיים קונוס חיובי P כך ש: $a \notin P$ ובמקרה זה P מגדיר סדר
כך ש: $a < 0$ (כי $a - 0 = a \notin P$)

משפט (הכללה של הבעיה ה־17 של הילברט):
יהא: $(R,<)$ שדה סגור ממשי ויהא: $f \in R[t_1,..,t_n]$ (פולינום בכמה משתנים)
כך שלכל $b_1,..,b_n \in R$ מתקיים: $f(b_1,..,b_n) \geq 0$, אזי קיימות פונקציות רציונליות ב־n משתנים (מעל R): $q_1,..,q_m$
כך ש: $f = \sum_{i=1}^{m} q_i^2$
הוכחה:
נניח בשלילה כי f אינו מהצורה: $f = \sum_{i=1}^{m} q_i^2$
יהא: $R(t_1,..,t_n)$ שדה הפונקציות הרציונליות ב־ n משתנים . נשים לב כי זהו שדה פורמלי ממשי
(מתקיים כי: $\sum_{i=1}^{m} q_i^2 \Rightarrow \forall i \in \{1,..,m\}\; q_i^2 = 0$)
מכיוון ש: $f \notin E_{R(t_1,..,t_n)}$ אזי כפי שראינו קיים סדר: $<^*$ על $R(t_1,..,t_n)$ כך ש: $f <^* 0 \;\; (*)$
ניתן להרחיב את $R(t_1,..,t_n)$ לשדה סגור ממשית כך שהסדר על $\overline{R}$ הוא הרחבה של הסדר: $<^*$
נסמן את הסגור הנ"ל ב: $\overline{R}$ נשים לב כי סדר זה מרחיב את הסדר על R (מיחידות הסדר בשדות סגורים ממשית)
ב־ $\overline{R}$ מתקיים כי: $\overline{R} \vDash \exists x_1,.,x_n(f(x_1,..,x_n) < 0)$ (עבור ההצבה: $x_i = t_i$ מתקיים כי: $f(t_1,..,t_n) <^* 0$ ב־ $\overline{R}$ על פי $(*)$)
אבל $ROCF$ (תורת השדות הסדורים וסגורית ממשית) זו תורה שלמה מודלית (יש לה חילוץ כמתים ולכן על פי הטענה לעיל היא שלמה מודלית)
ו־ R תת מודל של $\overline{R}$ לכן הוא תת מודל אלמנטרי ומתקיים כי: $R \vDash \exists x_1,.,x_n(f(x_1,..,x_n) < 0)$ בסתירה להנחה.
לכן בהכרח: $f = \sum_{i=1}^{m} q_i^2$
$\square$

$LOEB \quad measure$:

תהא: L שפה , ויהיו $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ מודלים של תורה T.
לכל מודל M_i נגדיר את האלגברות הבוליאניות הבאות: $\Omega_n^i = \{\phi(x_1,..,x_n,\overline{b})^{M_i} \,|\, \phi \in L\, \overline{b} \in M_i^k\}$
ברור שזוהי אלגברה.
תהא: μ_i מידה (הסתברותית) אדיטיבית על Ω_n^i.
ונסתכל על: $M = \prod_u M_i$, שוב: Ω_n היא אלגברה בוליאנית
וניתן להגדיר פונקציה: $\mu : \Omega_n \to [0,1]^*$ ע"י: $\mu(\phi(x_1,..,x_n,\overline{b})^M) = \prod_u \mu(\phi(x_1,..,x_n,\pi_i(\overline{b})^{M_i})$
זו פונקציה אדטיבית:
אם: $\phi(x_1,..,x_n,\overline{b})^M \cap \psi^M(x_1,..,x_n,\overline{a}) = \emptyset$ (נסמן: $A = \phi(x_1,..,x_n,\overline{b})^M,\, B = \psi^M(x_1,..,x_n,\overline{a})$
ו: $\pi_i(A) = \psi^{M_i}(x_1,..,x_n,\overline{a_i})$)
אזי עד כדי קבוצה ממידה אפס מתקיים כי:
$\phi(x_1,..,x_n,\pi_i(\overline{b}))^{M_i} \cap \psi^{M_i}(x_1,..,x_n,\pi_i(\overline{a})) = \emptyset$ ולכן:

$$\mu^*(A+B)=\prod_u \mu(\pi_i(A+B))=\prod_u(\mu(\pi_i(A))+\mu(\pi_i(B))=\prod_u \mu(\pi_i(A))+\prod_u \mu(\pi_i(B))=\mu^*(A)+\mu^*(B)$$

נתבונן ב: $\prod_u R = R^*$ ונגדיר: $I_\infty = \{x \mid \forall r\in\mathbb{R}\, r<|x|\}$ ונגדיר: $I_\epsilon = \{x \mid \forall r>0\ |x|<r\}$
ויהא: $R^*\backslash I_\infty = R_{finite}$ אזי: $R^*/I_\epsilon \cong R$. ויהא ההומורפיזם: $ST\,:\,R_{finite}\to R$
[למעשה: $ST(x)=sup_{r\in\mathbb{R}}\{x-r>0\}$]
יהא: $\mu = ST\circ\mu^*$ אזי: μ היא מידה אדטיבית.
נראה כי ניתן להרחיב אותה למידה סיגמא אדטיבית על הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי: Ω_n.

משפט האן־קולמגורוב:
תהא: μ_0 מידה אדטיבית על אלגברה: Σ_0 ונניח כי מתקיים:
$\mu_0(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n$ לכל: $\{A_n\}\subset\Sigma_0$ זרות כך ש: $\cup_n A_n\in\Sigma_0$
אזי קיימת הרחבה: μ כך ש: μ היא מידה על: $\sigma(\Sigma_0)$

נראה כעת כי: Ω_n מקיימת את הנחת המשפט:
תהא: $B=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\Omega_n$ איחוד זר, טענה:
אזי: $\cap_n(B\backslash A_n)=\emptyset$ (הערה: $B\backslash A_n$ זו בעצם הקבוצה המוגדרת ע"י הפסוק: $\phi_n \sim \wedge\psi$ כך ש: ψ מגדיר את B ו־ ϕ_n מגדיר את A_n)
אבל מכיוון שהמודל הוא רווי, אזי קיים m כך ש: $\cap_{n=1}^m(B\backslash A_m)=\emptyset$, לכן מכיוון שהקבוצות זרות: $B=\cup_{n=1}^m A_n$
ולכל: $n>m$ מתקיים: $\mu(A_n)=0$
לכן: $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\mu(\cup_{i=1}^m A_i)=\sum_{i=1}^m\mu(A_i)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$.
לכן על פי משפט האן קולמגורוב קיימת הרחבה של: μ על: $\sigma(\Omega_n)$
ונגדיר כעת את $Loeb\,measure$ להיות ההשלמה של המידה: μ