גרסה חזקה של למת הרגולריות:

21 במרץ 2011

חלוקה של הגרף (G,E) הינה: n,ϵ רגולרית חזקה, אם: $G=\cup_{i=0}^{n}U_i$ (איחוד זר) כך ש: $|U_i|=|U_j|$ לכל: $1\leq i,j\leq n$, $|U_0|\leq\epsilon|G|$
ועבור: $B=\{(i,j)\,|\,1\leq i<j\; U_i,U_j\, not\; \epsilon\; rgullar\}$ מתקיים כי: $|B|<n^2\epsilon$

גרסה חזקה של למת הרגולריות:
לכל $\epsilon>0$, $k\in\mathbb{N}$ קיים: $K\in\mathbb{N}$ עבורו לכל גרף: (G,E) (עם לפחות K קשתות) , קיים: $k\leq n\leq K$ כך שקיימת חלוקה n,ϵ רגולרית חזקה.

הוכחת הגרסה החזקה:
נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה: אזיי קיימים: k,$\epsilon>0$ כך שעבורם לכל $K>k$ קיימים גרפים: (G_K,E_K)
עבורם לכל: $k\leq n\leq K$ לא קיימת חלוקה: n,ϵ רגולרית חזקה.

בשונה ממה שעשינו בהרצאה הפעם נבנה את הסיגמא אלגברה והמידה שלנו בצורה מעט שונה:
תהא: $\mathcal{B}_K^n$ האלגברה הבוליאנית הנוצרת על ידי כל תתי הקבוצות של: G_K^n ונגדיר מידה μ_K^n על B_K^n בדיוק כפי שעשינו בהרצאה: $\mu_K^n(A)=\frac{|A|}{|G_K|^n}$
כעת נגדיר: $(G,E)=\prod_u(G_K,E_K)$, $\mathcal{B}^n=\prod_u\mathcal{B}_K^n$, (כאשר אנו מרחיבים את $\mathcal{B}_K^n$ לשפת האלגבראות הבוליאניות) אזי גם $\mathcal{B}^n$ אלגברה בוליאנית.
ושוב אנו מקבלים פונקציה $\overline{\mu^n}:\mathcal{B}^n\to[0,1]^*$ ונקבל כי: $\mu^n=st\circ\overline{\mu^n}$ זו מידה אדטיבית סופית.
כמו כן $\mathcal{B}^n$ היא $\aleph_1$ רוויה , לכן שוב נוכל להרחיב את μ^n למידה סיגמא אדטיבית על: $\sigma(\mathcal{B}^n)$ (לפרטים נוספים ראה [1])

כעת בדיוק כמו בהרצאה נגיע למצב ש: $h=\sum_{i,j}\alpha'_{i,j}\chi_{U_i\times U_j}-h'$ כך ש: $||h'||_2<\frac{1}{2}(\epsilon^4(1-\epsilon)^2)$, h היא ההטלה של: χ_E על: $(B_1^\sigma\otimes B_2^\sigma)^\sigma$
ו: $\{U_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathcal{B}^1$, כך ש: $\mu(U_i)>0$ וגם: $\cup U_i=G$.
(לפרטים נוספים ראו את סיכומי השיעור הקודם)

בה"כ נניח כי: $\mu(U_1)=min\{\mu(U_i)\,|\,1\leq i\leq n\}$
כעת נעדן את החלוקה: בצורה הבאה: יהא: $r\in\mathbb{N}$ כך ש: $\frac{n\mu(U_1)}{r}<\frac{\epsilon}{2}$
נעדן כל: U_i כך ש: $U_i=\cup_{j=1}^{m_i}H_j^i$ וגם: $\mu(H_j^i)=\frac{\mu(U_1)}{r}$ לכל: $1\leq j\leq m_i-1$ ו: $\mu(H_{m_i}^i)<\frac{\mu(U_1)}{r}$.

כלומר סה"כ קיבלנו כי קיימת חלוקה: $G=\cup_{i=0}^{m}D_i$ כך ש: $\mu(D_i)=\frac{\mu(U_1)}{r}$ (עבור: $1\le i\le m$) ו: $\mu(D_0)\le\frac{n\mu(U_1)}{r}$
בפרט מתקיים כי:
$|\mu(D_i)-\mu(D_j)|<\frac{\epsilon}{(m-1)}$ לכל $1\le i,j\le m$
לכן קיימת $E\subset\mathbb{N}$ גדולה כך שלכל: $r\in E$ מתקיים כי: $|\mu_r(D_i^r)-\mu_r(D_j^r)|<\frac{\epsilon}{2(m-1)}$ לכל $1\le i,j\le m$ (עבור: $D_i=[(D_i^1,..,)]$)
בה"כ נניח: $|D_1^r|=min\{|D_i^r|\}$, ואז מתקיים כי: $|D_i^r|-|D_1^r|<|G^r|\frac{\epsilon}{2(m-1)}$ לכל $2\le i\le m$ ולכן נוכל לבצע חלוקה:
$C_i^r=D_i^r\cup Z_i^r$ כך ש: $|C_i^r|=D_1^r$ וגם: $|Z_i^r|<|G^r|\frac{\epsilon}{2(m-1)}$
לכן סה"כ קיבלנו כי:
$G=(\cup_{i=1}^{m}D_i')\cup(\cup_{i=1}^{m-1}Z_i)\cup(D_0)$
(כך ש: $Z_i=[(Z_1^1,...,)]\quad C_i=[(C_i^1,...,)]$)
נגדיר: $C_0=\cup_{i=1}^{m-1}Z_i\cup D_m$
אזי: $\mu(C_0)\le\frac{\epsilon}{2(m-1)}(m-1)+\frac{n\mu(U_1)}{r}<\epsilon$.

יהיו $\alpha_{i,j}$ כך ש: $h=\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\chi_{C_i\times C_j}-h'$
ותהא: $B_K=\{(i,j)\,|\,0<i<j\ C_i^K, C_j^K\ not\ \epsilon\ regular\}$ ו: B כך ש:
$u(\{i\in\mathbb{N}\,|\,B_i=B\})=1$ (קיימת כזו כפי שראינו בהרצאה)
אזי מתקיים כי:
$|B|\ge\epsilon m^2$ (על פי הנחת השלילה)
וכמו בדומה להוכחת הגרסה החלשה לכל: $(i,j)\in B$ יהיו:
$V_{i,j}^r\subset C_i^r$ ו־ $V_{j,i}^r\subset C_j^r$
ה'עדויות' לכך ש: C_i^r, C_j^r אינן ϵ רגולריות (עבור $r\in\{i\in\mathbb{N}\,|\,B_i=B\}$)
ונגדיר: $V_{j,i}=[(V_{j,i}^1,...,)]$.
אזי מתקיים לכל: $(i,j)\in B$:
$\epsilon\mu(C_i)\le\mu(V_{i,j})$ $\epsilon\mu(C_j)\le\mu(V_{j,i})$
וגם: $1=\mu(G)=\sum_{i=0}^{m}\mu(C_i)=m\mu(C_1)-\epsilon\Rightarrow\mu(C_1)=\frac{1-\epsilon}{m}$

בנוסף מתקיים: $\alpha_{i,j}=\frac{<\chi_E,\chi_{C_i\times C_j}>}{||\chi_{C_i\times C_j}||}=\frac{\mu(E\cap(C_i\times C_j))}{\mu(C_i)\mu(C_j)}$ ונגדיר: $\beta_{i,j}=\frac{\mu(E\cap(V_{i,j}\times V_{j,i}))}{\mu(V_{i,j})\mu(V_{j,i})}$
אזי: $|\alpha_{i,j}-\beta_{i.j}|\ge\epsilon$ לכל: $(i,j)\in B$
לכן ב.ה.כ נניח כי עבור: $B^+=\{(i,j)\,|\,\alpha_{i,j}-\beta_{i.j}\ge\epsilon\}$ מתקיים כי: $|B^+|\ge\frac{\epsilon}{2}m^2$ (אחרת ניקח: $B\backslash B^+$)
ונסמן: $L=\cup_{(i,j)\in B^+}V_{i,j}\times V_{j,i}$ אזי $L\in B^1\otimes B^1$ לכן מתקיים כי:

$$0=<\chi_E-h,\chi_L>\Rightarrow\int h'\chi_L=\sum_{(i,j)\in B^+}(\alpha_{i,j}\mu(V_{i,j})\mu(V_{j,i})-\beta_{i,j}\alpha_{i,j}\mu(V_{i,j})\mu(V_{j,i}))\ge$$
$$\sum_{(i,j)\in B^+}\epsilon\mu(V_{i,j})\mu(V_{j,i})\ge\sum_{(i,j)\in B^+}\epsilon^3\mu(C_1)^2\ge\frac{1}{2}(\epsilon^4m^2\mu(C_1)^2)\ge\frac{1}{2}(\epsilon^4(1-\epsilon)^2)$$

מצד שני: $<h',\chi_L>\le||h'||\cdot||\chi_L||<\frac{1}{2}(\epsilon^4(1-\epsilon)^2)$, סתירה.
□