LA GÉOMÉTRIE DES MOUVEMENTS

PATRICK IGLESIAS-ZEMMOUR

En hommage à Jean-Marie Souriau

Résumé

Nous discutons le dépassement des catégories aristotéliciennes classiques d'Espace et de Temps et leur remplacement par la *catégorie des Mouvements*, en tant que tels. Nous essayons de montrer comment ce dépassement est devenu *impératif* et rendu *opératoire* grâce à la théorie des groupes, la géométrie symplectique, et plus récemment grâce à la difféologie.

Et afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté quant à la prétention de ce texte, qui est pour une bonne partie une relecture de textes anciens, je m'approprierai ce préalable :

> « *Prenez donc ce portrait tel qu'il est car il ne vous est pas adressé pour vous instruire de ce que vous savez déjà, ni pour ajouter un peu d'eau au torrent de votre intelligence et de votre jugement ; mais parce que nous n'avons pas coutume, que je sache, de dédaigner le portrait et la présentation des choses, même si nous les connaissons mieux sur le vif.* »
>
> Giordano Bruno, *Le banquet des cendres*

1. Introduction

« *Puisque la nature est principe de mouvement et de changement, et que notre recherche porte sur la nature, ce qu'est le mouvement ne doit pas nous échapper* ». C'est en ces termes qu'Aristote introduit son étude du mouvement, qui le conduit à objectiver le temps et l'espace et à en faire les catégories fondamentales de la mécanique pendant les siècles qui ont suivi. Plus tard, Bruno et Galilée lui contestent l'Espace comme catégorie impérative. En attendant, Maïmonide lui a déjà disputé la nature éternelle du temps, détachée du mouvement des choses. Il faudra ensuite Einstein et Poincaré pour que l'intuition de Maïmonide soit consolidée par la théorie et confirmée

Date: 8 février 2012.

Texte inspiré d'un exposé *Géométrie et dynamique des mouvements* donné à la conférence *La reconquête de la géométrie après Lagrange* à l'IHES en mars 2010, et d'un exposé sur *La difféologie des mouvements* à la conférence *Categories and Physics 2011* à l'université Paris-Diderot.

par l'observation et l'expérience. Il ne reste donc au mécanicien que le mouvement nu, dépouillé de catégories accessoires (*accidentelles*), comme objet de son étude.

En développant sa méthode de la variation des constantes, à propos des questions de stabilité du système des planètes, Lagrange a commencé à élaborer les outils mathématiques qui ont permis ensuite de travailler sur l'espace des mouvements en tant que tels. C'est la genèse de la mécanique symplectique et le développement significatif des outils analytiques qui l'accompagnent. Se débarrassant des figures on a pu croire à la disparition de la géométrie en mécanique, mais la structure dévoilée par Lagrange introduit un objet inattendu dont la nature et l'importance ne sont apparues que plus tard, le groupe des transformations canoniques, ou groupe des symplectomorphismes, de l'espace des mouvements. Au sens de Klein, la mécanique retrouve ainsi, et renouvelle significativement, sa géométrie perdue. Les groupes d'Aristote, de Galilée et de Poincaré, qui définissent les trois (relativités) mécaniques évoquées plus haut, apparaissent alors comme des constituants de cette nouvelle géométrie, sans qu'il ne soit plus nécessaire de recourir aux catégories (périmées) de Temps et d'Espace [1].

C'est de ces questions que nous discutons et, en particulier, de la contribution moderne de J.-M. Souriau à l'élaboration de ce nouveau cadre formel, particulièrement grâce au traitement des symétries [2].

Nous montrerons enfin qu'en généralisant la notion d'application moment à tout le groupe des automorphismes d'une 2-forme fermée, dans le cadre difféologique, on retrouve la dynamique du système comme les caractéristiques de cette application, c'est-à-dire comme les composantes connexes des préimages de ses valeurs. Finalement, le groupe des automorphismes de la structure canonique de l'espace d'évolution d'un système capture à la fois la géométrie du système et sa dynamique.

Note 1 — Nous mettons une majuscule à Temps et Espace quand nous entendons ces termes comme les noms propres des catégories aristotéliciennes. Et nous les écrivons en minuscules quand ils sont à prendre au sens commun.

Note 2 — Le mode d'exposition de cet article peut sembler déconcertant à certains, c'est un mélange de mode allusif et mathématique. Certains termes, d'usage commun, ne sont pas définis précisément dans une partie et d'autres le sont dans une autre partie. Cet aspect reflète d'une certaine façon l'évolution des idées en physique : d'une intuition initiale, où les mots n'expriment qu'une sensibilité, à une formalisation conventionnelle. Le travail du physicien théoricien consiste exactement en ceci : aider ce passage de l'une à l'autre. Une théorie physique n'est achevée que lorsqu'elle pénètre le domaine des mathématiques pour en devenir un élément, une branche.

---

1. On pourrait dire plus précisément que le groupe absorbe, ou code, ces postulats mécaniques sans qu'il soit nécessaire ensuite de les faire valoir séparément.

2. Nous pourrions ajouter « et aux exigences de principe du programme de la mécanique quantique », mais nous ne traitons pas cet aspect.

NOTE 3 — Cet article comporte quelques résultats nouveaux, sur la difféologie des espaces de mouvements, exposés à la fin. Ils pourraient, techniquement, être présentés isolement et d'un point de vue purement mathématique. J'ai choisi de les présenter dans le cadre général d'une réflexion sur l'évolution des idées, et de leur formalisation, en mécanique ; car c'est dans ce contexte que j'ai été conduit à m'y intéresser.

NOTE 4 — On a assisté récemment à un renouveau de cette éternelle discussion sur la nature du temps, dans diverses revues ou livres [3]. Il est possible que ce soit pour la raison que Maïmonide exprime en ces termes : « *les accidents dont les substrats sont d'autres accidents sont une chose très obscure* ». Mais si l'on s'accorde avec la position à laquelle il s'en tient, que « *le temps n'est qu'accident au mouvement* », alors le temps perd de son mystère, il n'est qu'une façon, plus ou moins commode selon les cas, de coder le mouvement — c'est-à-dire d'exprimer le changement : de décrire la chose qui change. Qu'on code le *changement de la chose* par une série d'étiquettes, par une suite de nombres réels, par des sauts quantiques, ou par tout autre procédé, peu importe ; l'objet d'étude du mécanicien est le changement, de quelque façon qu'il se manifeste.

REMERCIEMENTS. Je remercie Jean-Pierre Bourguigon, Pierre Cartier et Yvette Kosmann-Shwartzbach, qui m'ont donné l'occasion de m'exprimer sur ce sujet à leur colloque *La reconquête de la dynamique par la géométrie après Lagrange*. Je remercie Thibault Damour qui, par son invitation, a rendu la rédaction de ce texte possible ; ainsi que l'IHÉS pour son hospitalité et son environnement stimulant. Je remercie aussi Georges Hansel pour nos échanges sur *Le Guide des égarés* qui ont fait écho à mes propres lectures. Je remercie enfin mes amis Paul Donato et François Ziegler qui, par leurs remarques ou leur écoute, m'ont permis d'amender ce texte en quelques endroits.

2. UNE BRÈVE HISTOIRE DE L'ESPACE ET DU TEMPS

Commençons par rappeler le préalable d'Aristote, en ce qui concerne l'étude de la nature, qu'il énonce dans *La Physique*, livre III, chap. 1 :

> «*Puisque* ***la nature est principe de mouvement*** *et de changement, et que notre recherche porte sur la nature,* ***ce qu'est le mouvement ne doit pas nous échapper****, car, si on l'ignore, on ignore nécessairement la nature.* »

Platon et Aristote
Thrace, 384 BCE

Ainsi, le *mouvement* est placé, péremptoirement, au coeur de l'étude de la nature par Aristote. Et c'est la nature du mouvement (*qui ne doit pas nous échapper*) qu'il va essayer de décomposer et qui le conduira à abstraire les catégories d'Espace et de Temps. Ces catégories vont être considérées ensuite,

3. Paradoxalement, pas sur la nature de l'espace, il semble que la nature (contestable) de l'espace ne soulève pas autant de questions.

par les savants, comme des catégories *impératives* et vont conditionner pendant les nombreux siècles à venir l'étude de ce qu'on a coutume d'appeler *la Physique*.

L'Espace d'Aristote

En continuant notre lecture de *La Physique* d'Aristote, on trouve au chapitre 4 du livre IV, ceci :

> «*Il faut donc d'abord comprendre qu'on ne mènerait pas de recherche sur le lieu s'il n'y avait pas de* ***mouvement selon le lieu****.* »

Ainsi le mouvement se fait selon le *lieu*. Cette sentence introduit une des dix catégories d'Aristote, la catégorie de lieu, comme un élément de compréhension (ou décomposition) du mouvement. Ce qu'est — ou n'est pas — le lieu, Aristote nous le dit ensuite. On lit dans le même chapitre, à propos du lieu :

> « *Le lieu est* ***contenant premier*** *de ce dont il est le lieu.* »
> « *Il n'est* ***rien de la chose****.* »
> « *Chacun des corps est porté par nature et demeure en ses* ***lieux propres****.* »

Ce qu'on peut lire de la façon suivante : premièrement, il n'y a rien d'antérieur au lieu quant au contenant des choses, c'est-à-dire qu'il n'y a rien entre le lieu et la chose autre que le lieu et la chose. Deuxièmement, Le lieu ne se confond pas avec la chose, c'est à dire que le lieu existe *per se* absolument, il n'est pas un *accident* de la chose. Enfin, et de façon plus subtile, Aristote nous dit ce que sont les lieux : ils sont les *lieux propres* des choses. Si nous croyons que l'espace contenu dans un vase (par exemple) n'est pas vide [4], chaque lieu à l'intérieur du contenant est occupé par un corps (qu'il soit réel ou imaginaire) qui est dans son lieu propre, c'est-à-dire dans son lieu de repos — puisque *les lieux propres des choses sont les lieux du repos des choses*. En effet, selon Aristote, la nature tend à conduire toute choses vers le repos. Cela nous donne une interprétation (ou représentation) des lieux comme l'ensembles des lieux propres — des lieux de repos — des choses. L'ensemble des lieux, selon Aristote, nous le nommons *Espace*. Ainsi :

▶ *L'**Espace d'Aristote** peut s'interpréter comme l'ensemble des lieux propres — de repos — des corps vers lesquels* ils sont portés par nature.

Nous reviendrons plus loin sur : comment ce présupposé s'interprète de façon moderne, en identifiant les *lieux de repos* avec les *mouvements au repos*. Enfin, n'oublions pas, pour éviter tout anachronisme, que l'Espace d'Aristote est celui du monde sublunaire, c'est-à-dire essentiellement l'espace de la terre, qu'il croit absolument immobile, et dont l'immobilité justifie la notion de repos.

4. Voir la discussion sur le vide dans *La Physique*, livre IV.

Le Temps d'Aristote

En ce qui concerne le temps, Aristote nous dit, toujours dans *La Physique*, livre IV, chapitre 11 :

> «*Le temps est le **nombre du mouvement**, selon l'antérieur et le postérieur.* »

Et nous lisons au chapitre 12 :

> «*Le temps est **mesure du mouvement**.* »

Enfin, pour clarifier le tout, il précise au chapitre 14 :

> «*Si donc ce qui est premier est **mesure de toutes les choses** du même genre, **le transport circulaire uniforme est principalement mesure** parce que son nombre est le plus connu.* »

Ce à quoi il ajoute, presque immédiatement :

> « *C'est pourquoi le temps **semble être le mouvement de la sphère**, parce que **par ce mouvement-là se mesurent aussi les autres mouvements** et aussi le temps.* »

Il semble clair que, pour Aristote, le temps est avant tout la *mesure du mouvement*. Le temps est donc considéré préalablement comme un *accident* du mouvement : la mesure du mouvement n'est pas le mouvement. Cependant, la connaissance de ce qui est premier — le mouvement de la sphère céleste — est mesure de toute chose. Ainsi, la mesure du mouvement de toute chose (le temps de la chose, la chronologie de son mouvement, puisque *le temps est nombre du mouvement, selon l'antérieur et le postérieur*) peut se rapporter au mouvement de la sphère céleste. C'est ainsi qu'*Aristote fait passer le temps du statut d'accident à celui d'universel objectivé* :

- *La sphère céleste, est choisie par Aristote comme* horloge universelle*. Et sa chronologie, la numération de son mouvement selon l'antérieur et le postérieur, est le **Temps d'Aristote**, auquel est rapporté le mouvement de toute chose.*

Il n'est pas question ici de cohérence dans la mesure du temps, liée à la question de la *simultanéité*, ou synchronisation des horloges, que nous traiterons plus tard, mais seulement de l'existence d'un *mouvement éternel* et *régulier* auquel tout autre mouvement peut se rapporter. L'abstraction de ce mouvement éternel, de la chose dont il est le mouvement, est donc ce que l'on entend par Temps aristotélicien [5].

5. Certains disent que la ligne droite (mathématique) c'est *ce à quoi je pense quand je trace un trait à la craie sur le tableau.* Aristote pourrait dire de même : le temps, c'est ce à quoi je pense quand je considère le mouvement de la sphère céleste.

L'objection de Maïmonide

Maïmonide
Cordoue 1138
Fostat 1205

Le *Guide des Egarés* est un ouvrage majeur de Maïmonide. Il l'a écrit pour réconcilier les intellectuels juifs du 12ème siècle CE avec leur histoire, tradition, culture, rite, mythe, foi ... Ecrit pour son élève Rabban Yossef ben Yehuda, il s'adresse en réalité à tous les intellectuels juifs dont la connaissance et le savoir — la raison — est parfois heurtée par les récits bibliques, lorsqu'on en prend les termes au pied de la lettre.

Maïmonide est un admirateur d'Aristote qu'il nomme lui-même *le prince des philosophes*, et il en adopte généralement la philosophie [6]. Il n'est donc pas question pour lui de disputer l'héritage d'Aristote, dont il se sent aussi porteur, mais il n'est pas non plus question pour lui d'abandonner son héritage culturel propre, et de jeter — sous prétexte de modernité — le bébé avec l'eau du bain. La stratégie de conciliation, que Maïmonide propose, consiste simplement à chercher le sens caché — allégorique — des sentences et parties du discours de la Torah, ou d'autres textes sacrés, lorsqu'ils se trouvent en contradiction avec la raison et le savoir de l'époque. Cela conduit Maïmonide à des explications détaillées sur la nature des termes anthropomorphiques lorsqu'ils sont attribués au divin et à donner un code de lecture des écrits hébreux sacrés qui s'accorde avec les concepts et principes aristotéliciens et la réalité scientifique (cf. son discours sur la nature des anges, par exemple, dans *Le Guide*, Partie II, chapitre VI).

Mais nous allons voir que lorsqu'il s'agit du temps, Maïmonide ne peut que se distancier d'Aristote. On peut lire dans l'introduction de la Partie II du *Guide* ceci :

> «*Aux propositions précédentes j'en ajouterai une* [...] *qu'**Aristote prétend être vraie** et tout ce qu'il y a de plus admissible ; nous la lui concédons à titre d'hypothèse, jusqu'à ce que nous ayons pu exposer nos idées à cet égard. Cette proposition* [...] *dit que **le temps et le mouvement sont éternels** et toujours existant en acte. De cette proposition il s'ensuit nécessairement qu'**il y a un corps qui a un mouvement éternel**, toujours en acte, et c'est le cinquième corps* [7]*.* »

En effet, c'est ce qu'Aristote affirme au chapitre 1 du livre VIII de *La Physique* : « *Il est clair que le mouvement est éternel* ». Il sait pertinemment que cette opinion n'est pas admise par tous, puisqu'il ajoute aussitôt : « *Platon seul conçoit le temps engendré : il dit qu'il est né avec le ciel et que le ciel est né* ».

6. Lire à ce propos *Création et éternité du monde selon Maïmonide* de Georges Hansel.
7. La *quinte essence*, l'horloge d'Aristote.

Comme on voit, l'enjeu pour Maïmonide ici est de taille : c'est le principe même de *Création*, une pierre angulaire de la tradition juive [8]. Mais il s'exprime aussi très clairement, au chapitre XXV de la Partie II du *Guide* :

> «*Sache que,* ***si nous évitons de professer l'éternité du monde, ce n'est pas parce que le texte de la Torah proclamerait le monde créé****; car les textes qui indiquent la création du monde ne sont pas plus nombreux que ceux qui indiquent la corporéité de Dieu. Au sujet de la création du monde aussi,* ***les moyens d'une interprétation allégorique ne nous manqueraient pas*** *et ne nous seraient pas interdits ; nous pourrions employer ici ce mode d'interprétation, comme nous l'avons fait pour écarter la corporéité (de Dieu)* [...] *Mais deux raisons nous ont engagé à ne pas le faire. La première est celle-ci : l'incorporalité de Dieu a été démontrée, et il faut nécessairement avoir recours à l'interprétation allégorique, toutes les fois que, le sens littéral est réfuté par une démonstration.* ***Mais l'éternité du monde n'a pas été démontrée****, et, par conséquent,* ***il ne convient pas de faire violence aux textes et de les interpréter allégoriquement, pour faire prévaloir une opinion dont on pourrait aussi bien faire prévaloir le contraire, en raisonnant d'une autre manière****.* »

C'est clair, la position de Maïmonide n'est pas dogmatique, il estime seulement que les arguments d'Aristote, ou de ses épigones, sur l'éternité du monde ne sont pas une démonstration ; et qu'il n'est donc pas nécessaire de renoncer à l'interprétation littérale des textes. Il écrit, au chapitre XXV de la deuxième partie du *Guide*, ceci :

> «*Mon but, dans ce chapitre, est d'exposer qu'****Aristote n'a pas de démonstration sur l'éternité du monde*** *selon son opinion.* ***Il ne s'abuse même pas là-dessus****; je veux dire qu'il sait lui-même qu'il n'a pas de démonstration là-dessus.* »

D'ailleurs, connaissant les exigences d'une *démonstration*, Maïmonide ne prétend pas vouloir démontrer que le monde a été créé (comme on l'a vu ci-dessus). Il se borne à contester ce que l'on prête à Aristote comme étant une démonstration de l'éternité du mouvement de la sphère céleste ; et donc du monde. L'argumentaire de Maïmonide repose essentiellement sur l'idée (simple) suivante que ce qui est arrivé à son stade final d'évolution n'exclut pas qu'il ait été dans un état antérieur différent, même si son stade final semble *parfait* et *impérissable*. En d'autres termes, si nous sommes incapables d'imaginer un commencement et une fin au mouvement de la sphère céleste, cela n'implique pas qu'elle n'ait pas été créée. Comme ce débat n'est

8. La Torah ne commence-t-elle pas par ces termes **בראשית ברא אלהים את השמים ואת הארץ**

que parallèle à la question que nous traitons ici, nous nous limiterons à citer ce passage du chapitre XVII, deuxième partie du *Guide*, qui traite ce sujet :

> « *Aristote se prend à nous contredire, en argumentant contre nous de la nature de l'être arrivé à son état définitif, parfait et existant en acte, tandis que nous,* ***nous lui affirmons qu'après être arrivé à son état définitif et être devenu parfait, il ne ressemble en rien de ce qu'il était au moment de naître****, et qu'il a été produit du néant absolu.* »

C'est le cadre de cette dispute avec Aristote, sur l'éternité du monde, qui conduit Maïmonide (et c'est ce qui nous intéresse ici) à réaffirmer vigoureusement la *nature accidentelle du temps* ; et à l'occasion, à préciser les raisons pour lesquelles cette nature accidentelle peut parfois échapper à l'entendement. On lit dans *Le Guide*, Partie II, chapitre XIII, ceci :

> « *Ce qui disons nous a fait que* ***le temps*** *est resté une chose obscure pour la plupart des hommes de science, de sorte qu'ils ont été indécis* [...] *sur la question de savoir s'il a ou non, une existence réelle, c'est qu'il* ***est accident*** *dans un autre accident.* ***Mais les accidents dont les substrats sont d'autres accidents*** [...] ***sont une chose très obscure****, surtout lorsqu'il se joint à cette circonstance que l'accident qui sert de substratum n'est pas dans un état fixe, mais change de condition ; car alors la chose est plus obscure. Or dans le temps, les deux choses sont réunies ; car d'abord* ***il est un accident inhérent au mouvement, lequel est un accident dans la chose mue****.* »

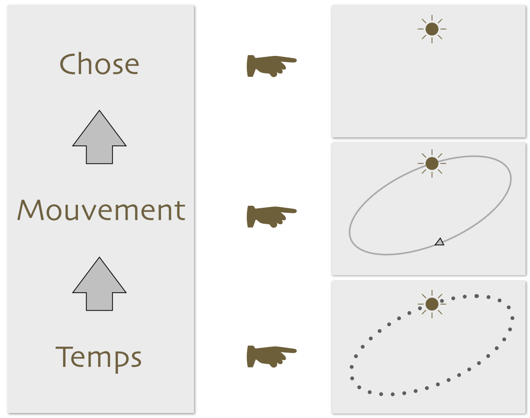
Maïmonide remet donc — si j'ose dire — le temps à sa place : *il n'est qu'un accident du mouvement qui lui-même n'est qu'un accident de la chose.* Il ne peut que s'en tenir — rigoureusement — à la proposition initiale de Platon, et même d'Aristote, qu'il a rappelé dans l'introduction de la Partie II du *Guide* (quinzième proposition), et qu'il a ensuite élaborée :

> « *Un mouvement n'existe que dans un temps, et* ***on ne saurait penser le temps qu'avec le mouvement****.* »

Refusant l'éternité du monde proposée par Aristote, Maïmonide ne peut que refuser de détacher le temps du mouvement des choses, et le laisse réduit à une simple chronologie, *une histoire*, de ces mouvements. C'est ainsi que Maïmonide est conduit à réfuter *de facto* le caractère absolu, abstrait (au sens étymologique), du temps aristotélicien, pour ne lui concéder finalement que le statut d'accident du mouvement,

Si on voulait aller plus loin, le mouvement lui-même n'est qu'accidentel à la chose, il n'en est pas l'essence[9]. Mais cette remarque n'est pas pertinente

9. C'est pour cela en particulier que parler des quelques instant avant le Big-Bang, comme on le lit parfois, n'a pas de sens. À moins d'imaginer que le Big-Bang ne soit qu'un instant dans la destruction et la reconstruction d'une chose pré-existante. Ce qui



«Le temps est un accident inhérent au mouvement, lequel est un accident dans la chose mue.» — Maïmonide, *Le Guide des égarés.*

pour ce qui nous concerne, dans la mesure où nous ne nous intéressons qu'à la mécanique, c'est-à-dire à la description et l'intelligibilité des mécanismes, qu'ils soient naturels (le système du ciel) ou humains (poulies, leviers etc.).

Notons toutefois que cette réfutation du temps absolu d'Aristote ne concerne pas la simultanéité, ou synchronisation des horloges, dont évidemment il ne dit rien et ne peut rien dire. Il faudra attendre la fin du 19ème siècle et la théorie de la relativité d'Einstein pour soulever cette question. Mais cela n'enlève en rien la pertinence de l'objection de Maïmonide sur la nature absolue du temps aristotélicien ; cela ne lui en donne, au contraire, que plus d'intérêt.

Résumé pour ce qui concerne le temps Pour *Platon* : Le temps est engendré et né avec le ciel. Pour *Aristote* : Le monde est incréé et éternel, le temps est détaché des mouvements. Pour *Maïmonide* : Il n'est pas prouvé que le monde soit éternel et on ne peut détacher le temps du mouvement dont il est accident.

L'objection de Bruno

Giordano Bruno
Nola 1548
Rome 1600

Nous avons entendu la dispute, sur la nature du temps, de Maïmonide avec Aristote. Et s'il y a une remise en cause du bien-fondé du temps aristotélicien, il n'y a pas pour autant débat sur la nature de l'espace. Il est convenu d'attribuer les premiers éléments de la controverse sur la nature de l'Espace d'Aristote à Giordano Bruno, dans son *Banquet des Cendres* publié en 1584. C'est dans cet ouvrage qu'il remet en cause la logique qui conduit Aristote,

ramènerait rapidement à la question sur l'éternité du monde. Maïmonide préviens d'ailleurs cette question au chapitre VIII « En effet, dès que tu affirmes un temps avant le monde, tu es obligé d'admettre l'*éternité* ; car le temps étant un accident, auquel il faut nécessairement un *substratum*, il s'ensuivrait par là qu'il a existé quelque chose avant l'existence de ce monde qui existe maintenant, et c'est précisément à cela que nous voulons échapper ».

dans le second livre de son traité *Du Ciel et du Monde*, à conclure à l'immobilité de la terre, et qui consiste — dit sommairement — à affirmer : si la terre se meut, alors en lançant une pierre à la verticale, elle devrait retomber en un lieu différent, d'autant plus éloigné de son lieu de départ que le mouvement de la terre est rapide. Pour réfuter cet argument, Bruno prend l'exemple du mouvement d'un navire, il fait dire à Smitho, dans le troisième dialogue :

כִּי-אֵפֶר כַּלֶּחֶם אָכָלְתִּי
תהילים, קב-י
Car la cendre comme le pain j'ai mangé
Psaumes 102,10

> «*Le mouvement qui affecte la terre doit nécessairement changer toutes les relations entre les lignes droites et obliques. Il y a une différence entre le mouvement d'un navire et le mouvement de ce que le navire contient.* ***S'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait jamais traîner un objet en ligne droite d'un bord à l'autre du navire*** *quand celui-ci court au large ;* ***ni retomber après un saut, à l'endroit même d'où l'on s'est lancé.*** »

L'objection est claire, elle n'est peut-être pas originale, mais a le mérite d'être écrite et publiée. Teofilo précise encore davantage la pensée de Bruno, quand il réplique :

> «*Ainsi se meut avec la terre tout ce qui se trouve sur la terre [...]* ***Un homme placé sur la berge*** *et jetant une pierre droit sur le navire, tandis qu'il suit la rivière,* ***manquera*** *d'autant plus* ***son coup*** *que la course sera plus rapide [...] Mais* ***un homme placé sur le mât*** *du navire, quelle que soit la vitesse du navire,* ***ne manquera pas le but : rien n'empêchera la pierre*** *[...]* ***d'atteindre en droite ligne*** *[...]* ***la base du mât.*** »

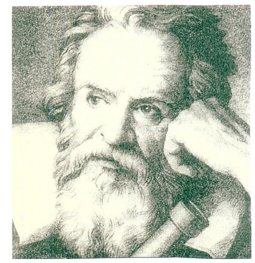
En ces quelques phrases se trouve exprimé ce qui est convenu d'appeler depuis : le *principe de relativité*. Bruno va un peu plus loin dans ses arguments quand il fait dire à Teofilo :

> «*La pierre lâchée par celui qui prend appui sur le navire et qui, par conséquent, est entrainé dans son mouvement, se voit imprimer une vertu dont est démuni la pierre lâchée par celui qui se tient à l'extérieur [...]* ***La première pierre est dotée de la vertu du moteur qui se meut avec le navire, l'autre de la vertu du moteur qui ne partage pas ce mouvement.*** »

Il n'y a pas de doute : le discours de Bruno est une réfutation de l'Espace d'Aristote, dans la mesure où — nous l'avons vu — l'Espace d'Aristote est sous-tendu par la notion de repos ; il ne peut se concevoir de repos des choses (au moins en ce qui concerne le monde sublunaire) que si la terre elle-même est au repos. Dès l'instant où la terre se meut, le principe de l'Espace d'Aristote est battu en brèche. On le sait, le 17 février 1600, Giordano Bruno est brûlé vif par l'Église. Il reviendra à Galilée de poursuivre sa quête.

L'abandon de l'Espace par Galilée

Dans son *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Galilée reprend l'argumentaire sur la question de la pierre lâchée du haut du mât d'un navire. Dans la *Deuxième journée* (280), il l'introduit grâce à Implicio, à qui il prête l'argument d'Aristote :



Galileo Galilei
Pise 1564
Arcetri 1642

> «*Il y a par ailleurs* ***l'expérience si caractéristique de la pierre qu'on lance du haut du mât du navire*** *: quand le navire est en repos, elle tombe au pied du mât ; quand le navire est en route, elle tombe à une distance du pied égale à celle dont le navire a avancé pendant le temps de la chute de la pierre.* »

J'ignore, lorsque Galilée parle de l'*expérience si caractéristique*, s'il fait allusion précisément à Bruno ou bien à un folklore qui remonte à l'antiquité. Il n'en reste pas moins que l'expérience du lâcher de pierre est bien une clé sur la question du mouvement ou du repos de la terre. Sans reprendre entièrement tout le débat qui entoure cette expérience hypothétique, nous conclurons avec l'opinion définitive de Galilée, dite par la bouche de Salviati, toujours dans la *Deuxième journée* (284)

> « *Que ses auteurs puissent la présenter sans l'avoir faite, vous en êtes vous-même un bon témoin : c'est sans l'avoir faite que vous la tenez pour certaine, vous en remettant à leur bonne foi ; il est donc possible et même nécessaire qu'ils aient, eux aussi, fait de même, je veux dire qu'ils s'en soient remis à leur prédécesseurs, sans qu'****on n'arrive jamais à trouver quelqu'un qui l'ait faite****. Que n'importe qui la fasse et il trouvera en effet que l'expérience montre le contraire de ce qui est écrit :* ***la pierre tombe au même endroit du navire, que celui-ci soit à l'arrêt ou avance à n'importe quelle vitesse****. Le même raisonnement valant pour le navire et pour la Terre, si la pierre tombe toujours à la verticale au pied de la tour,* ***on ne peut rien en conclure quand au mouvement ou au repos*** *de la Terre.* »

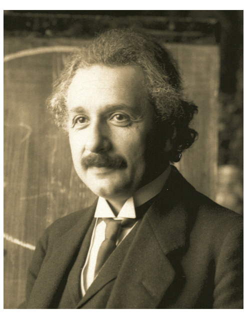
C'est Gassendi qui fera réaliser cette expérience en 1641, sur une galère dans le port de Marseille. Le résultat confirme, en effet, l'intuition de Bruno et de Galilée : le boulet lancé du haut du mât tombe bien à la base du mât, ni en avant ni en arrière, que la galère soit au port ou qu'elle vogue. Il ne reste alors qu'à accepter la conclusion de Galilée : *on ne peut rien conclure quant au mouvement ou au repos.* Notons toutefois que, dans cette sentence, Galilée évoque seulement le mouvement rectiligne uniforme, comme celui d'un navire sur une mer d'huile et plate.

Ainsi, Galilée signe l'**abandon de l'Espace** d'Aristote comme catégorie impérative de la physique. En effet, si l'espace en tant que construction mathématique peut se concevoir — et se conçoit très bien — le fait qu'il

Gassendi réalise l'expérience dans le port de Marseille en 1641.

soit impossible par une expérience mécanique de distinguer entre le mouvement rectiligne uniforme du repos aristotélicien disqualifie l'Espace d'Aristote dans la mesure où il est construit, comme nous l'avons vu plus haut, comme l'ensemble des lieux du repos des choses : plus de repos, plus d'Espace.

Le retour sur le Temps par Einstein



Albert Einstein
Ulm 1879
Princeton 1955

Nous avons vu plus haut que Maïmonide avait déjà malmené le Temps d'Aristote, absolu, auquel le mouvement de toute chose pouvait se rapporter. Son argument, même s'il était remarquablement perspicace et prémonitoire, était surtout un argument par défaut. Nous devons attendre le 19ème siècle, et les contradictions soulevées par les expériences de Michelson et Morley, pour voir ce débat ressurgir de façon dramatique et décisive. En effet, si la contribution de Galilée réfute l'Espace aristotélicien, elle ne réfute pas le Temps aristotélicien. Et les mécaniciens vivent toujours dans ce Temps là (et parfois même encore dans cet Espace là).

C'est Einstein avec sa *Théorie de la Relativité* qui dénouera les contradictions de la mécanique, héritée d'Aristote et de Galilée, avec l'expérience ; entre autre par l'introduction d'un mélange d'Espace et de Temps qui en sera la base. Il déclare la rupture complète de sa nouvelle mécanique d'avec la mécanique de Galilée, dans *La Relativité* — § La valeur heuristique de la théorie de la relativité — en ceci :

> « ***Les lois générales de la nature sont co-variantes par rapport aux transformations de Lorentz.*** »

Les *Transformations de Lorentz* qu'il évoque sont les automorphismes de l'*Espace de Minkowski*, ce mélange d'Espace et Temps dont il est question [10] plus haut, c'est un espace affine quadri-dimensionnel équipé d'une pseudo-métrique de signature $(+\,-\,-\,-)$. Notons que le vocabulaire utilisé ici par

10. Il est aussi appelé communément, de façon un peu malheureuse, *Espace-Temps*.

Einstein est devenu depuis imprécis, on parle aujourd'hui de Transformations de Lorentz pour les automorphismes linéaires de l'espace de Minkowski (quand on a fixé une origine), et de *Transformations de Poincaré* pour les automorphismes affines, nous y reviendrons.

Ce nouveau principe de relativité, avancé par Einstein, aura des conséquences sérieuses sur la nature du temps tel qu'il a été conçu par les mécaniciens jusque là. C'est pour cela qu'Einstein se doit d'insister, et il écrit dans *La Relativité* — § L'espace de Minkowski à quatre dimensions — ceci :

> « *Si nous n'avons pas été habitués à regarder le monde dans ce sens, comme un continuum à quatre dimensions, c'est qu'**en physique**, avant la venue de la théorie de la relativité, **le temps jouait un rôle différent et plus indépendant, comparé à l'espace**. [...] C'est pour cette raison que nous avons été habitués à traiter le temps comme un continuum indépendant. Et **c'est un fait, que pour la mécanique classique, le temps est absolu, i.e. indépendant de la position et des conditions du mouvement**.* »

En effet, comme nous le verrons plus loin, l'introduction des transformations de Poincaré est incompatible avec la notion de simultanéité, et donc d'un mouvement auquel pourrait se rapporter le mouvement de toute chose, c'est à dire d'un Temps aristotélicien.

On peut conclure qu'après la disqualification de l'Espace aristotélicien par Galilée, Eistein disqualifie le Temps aristotélicien, rendant justice en cela à l'intuition de Maïmonide. Il renvoie le temps à sa simple nature accidentelle (sans pour autant l'exprimer ainsi). Mais il nous donne aussi, et c'est capital, la clé qui permet à ce renoncement d'être opératoire : l'espace de Minkowski et ses automorphismes.

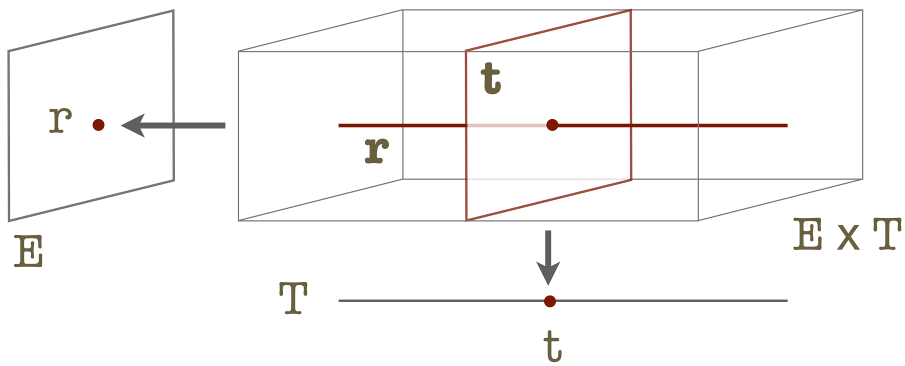
3. Les différentes mécaniques comme géométries

Jusqu'à présent, nous avons parcouru rapidement, et sur un mode plutôt allusif, la genèse et l'évolution des idées qui ont conduit les philosophes, ou mathématiciens, ou physiciens, du *programme d'Aristote* d'étude du mouvement : de la conception des catégories absolues d'Espace et de Temps, à leur renoncement. Mais il est clair qu'il est insuffisant de renoncer, encore faut il substituer ce qui fonctionne à ce qui est brisé. Pour comprendre comment, et par quoi, ces catégories qui ont été aussi fondamentales dans l'histoire des idées en mécanique, peuvent être remplacées, il est crucial, dans une première étape, de les revisiter de façon moderne et les remplacer par des équivalents épistémologiques opératoires. C'est ce que nous allons faire maintenant en décrivant les différentes mécaniques telles que nous les avons aperçues, comme des géométries, au sens de Felix Klein, c'est à dire comme différents groupes de transformations les caractérisant, et les actions de ces groupes sur les objets de la mécanique.

Le groupe d'Aristote

Aristote
Thrace, 384 BCE

En termes mathématiques, l'Espace d'Aristote est représenté par un espace affine euclidien orienté, que nous noterons E, isomorphe à $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard et muni de l'orientation positive. Le temps est représenté quant à lui par un espace affine euclidien orienté, que nous noterons T, isomorphe à $\mathbf{R}$ muni de sa structure euclidienne standard et muni de l'orientation positive. Notons que la structure euclidienne de T est naturellement héritée de la structure euclidienne de E, dans la mesure ou le temps se lit sur des horloges à aiguilles, ou des clepsydres, par la position spatiale des aiguilles ou du marqueur.



L'Espace-Temps d'Aristote

Pour caractériser géométriquement, au sens de Klein, la *mécanique d'Aristote*, nous avons besoin des préliminaires suivants :

Déclaration Nous identifions l'Espace d'Aristote — l'ensembles des lieux propres des corps — à l'ensemble des mouvements au repos des *points matériels*. C'est-à-dire à l'ensemble des graphes des applications constantes $[\mathsf{t} \mapsto \mathsf{r}]$, de T dans $\mathsf{E} \times \mathsf{T}$, où r parcourt E. On les notera par une lettre grasse

$$\mathsf{E} \simeq \left\{ \mathbf{r} = \{(\mathsf{r}, \mathsf{t}) \mid \mathsf{t} \in \mathsf{T}\} \subset \mathsf{E} \times \mathsf{T} \;\middle|\; \mathsf{r} \in \mathsf{E} \right\}.$$

Les éléments $\mathbf{r}$ sont représentés par les ligne rouges horizontales dans la figure ci-dessus. De même, nous identifions le Temps d'Aristote aux pré-images $\mathbf{t}$ dans $\mathsf{E} \times \mathsf{T}$ des instants t, quand t parcourt T. C'est-à-dire :

$$\mathsf{T} \simeq \left\{ \mathbf{t} = \{(\mathsf{r}, \mathsf{t}) \mid \mathsf{r} \in \mathsf{E}\} \subset \mathsf{E} \times \mathsf{T} \;\middle|\; \mathsf{t} \in \mathsf{T} \right\}.$$

De façon heuristique, les éléments $\mathbf{t}$ sont les ensembles d'*évènements* qui ont lieu simultanément à l'instant t. Ils sont représentés par les tranches verticales rouges de $\mathsf{E} \times \mathsf{T}$, au dessus de t, dans la figure ci-dessus [11].

---

11. Il est d'usage d'appeler le produit $\mathsf{E} \times \mathsf{T}$, l'*Espace-Temps* (d'Aristote), et ses éléments des *évènements*.

Ensuite le *Groupe d'Aristote*, dont on dira qu'il est le *groupe d'inertie* de la mécanique aristotélicienne[12] est défini comme le groupe des transformations de l'Espace-Temps aristotélicien qui préserve les catégories de Temps et d'Espace, leur mesure et orientation. En termes précis, une *transformation d'Aristote* est tout automorphisme g de la structure affine de $\mathsf{E} \times \mathsf{T}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- ⋆ **Préserve l'Espace** : échange les mouvements au repos. L'image d'un mouvement au repos $\mathbf{r}$ est un autre mouvement au repos $\mathbf{r}'$.
- ⋆ **Préserve le Temps** : échange les évènements simultanés. L'image d'un ensemble d'évènements simultanés $\mathbf{t}$, est encore un ensemble d'évènements simultanés $\mathbf{t}'$.
- ⋆ **Préserve les structures euclidiennes orientés** de l'Espace et du Temps.

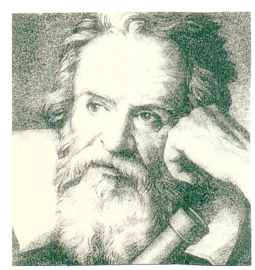
En faisant les identifications d'usage (voir plus haut), le groupe d'Aristote ainsi défini est représenté ordinairement par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ar + C \\ t + e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathrm{SO}(3) \\ C \in \mathbf{R}^3 \\ e \in \mathbf{R} \end{array} \right. .$$

Par ce passage au groupe d'inertie, les postulats d'Aristote sur l'Espace et le Temps, engendrent une *géométrie* au sens de Klein. La mécanique d'Aristote s'identifie à cette géométrie, c'est-à-dire aux actions du groupe d'Aristote sur des ensembles d'objets, qui peuvent être identifiés ensuite, éventuellement, à des objets ordinaires du monde mécanique d'Aristote.

Le groupe de Galilée

Le passage du système aristotélicien au système galiléen se fait en gardant le même continuum d'évènements[13] $\mathcal{C} \simeq \mathsf{E} \times \mathsf{T}$, mais les mouvements au repos d'Aristote $\mathbf{r} = [t \mapsto r]$ n'ont plus de statut privilégié puisque, selon Galilée, *on ne peut distinguer le repos du mouvement rectiligne uniforme*. En revanche, la projection $\tau : \mathcal{C} \to \mathsf{T}$ qui associe à un évènement, sa date, reste légitime. Ces principes sont traduits par le groupe d'inertie de la mécanique galiléenne : le *Groupe de Galilée*. Il est défini, de façon parallèle au cas aristotélicien, comme l'ensemble des transformations affines g de $\mathcal{C}$ qui satisfont aux conditions suivantes :



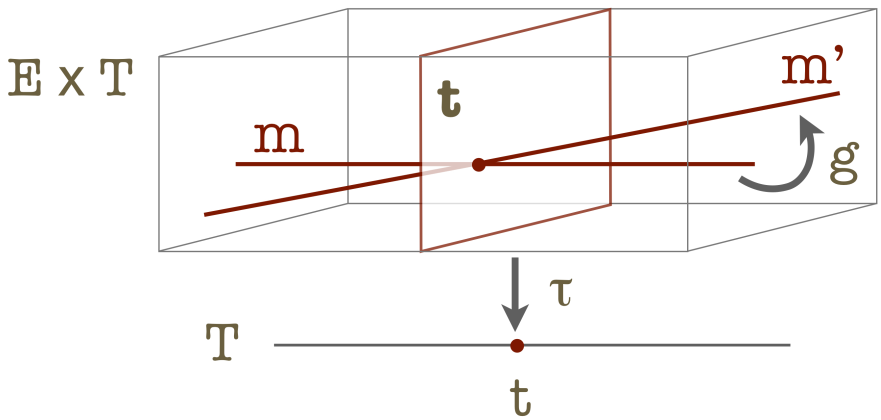
Galileo Galilei
Pise 1564
Arcetri 1642

- ⋆ **Préserve les mouvements inertiels galiléens** : échange les mouvements rectilignes uniformes en mouvements rectilignes uniformes.
- ⋆ **Préserve le Temps** : échange les évènements simultanés. L'image d'une fibre $\mathbf{t}$ est une fibre $\mathbf{t}'$.

---

12. On devrait plutôt dire la *statique aristotélicienne*.
13. Nous voulons éviter ici d'entrer dans des subtilités techniques formelles, sur les structures galiléennes, qui finalement ne conduisent nulle part ailleurs qu'au point où nous aboutirons de toute façon.

⋆ **Préserve les structures euclidiennes orientés** du Temps et des *espaces à chaque instant*, c'est-à-dire des fibres $\mathbf{t}$.



Le *continuum* galiléen

Nous avons introduit, au passage, la notion de *mouvement inertiel*. En effet, *chaque mécanique a ses mouvements inertiels*, pour la mécanique d'Aristote ce sont les mouvements au repos, pour Galilée ce sont les mouvements rectilignes uniformes, et nous verrons que pour Einstein ce seront les droites affines de l'espace de Minkowski.

En faisant les identifications d'usage, comme plus haut, le groupe de Galilée est représenté par les matrices

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ar + Bt + C \\ t + e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathrm{SO}(3) \\ B, C \in \mathbf{R}^3 \\ e \in \mathbf{R} \end{array} \right. .$$

Comme nous le voyons, le groupe de Galilée est un sur-groupe du groupe d'Aristote. L'élément B qui vient s'ajouter est responsable de ce qu'on appelle *la mise en mouvement*, ou *boost*. Ce sont ces transformations qui envoient les mouvements inertiels aristotéliciens [14] sur les mouvements inertiels galiléens. La figure ci-dessus essaye de représenter ce phénomène.

Ainsi, de même que pour la mécanique aristotélicienne, la mécanique galiléenne est une géométrie, la géométrie du groupe de Galilée.

Le groupe de Poincaré

Le passage de la mécanique de Galilée à la mécanique d'Einstein est plus dramatique : du continuum Espace-Temps, qui était plus ou moins préservé dans le passage d'Aristote à Galilée, il ne reste qu'un espace affine ; et les

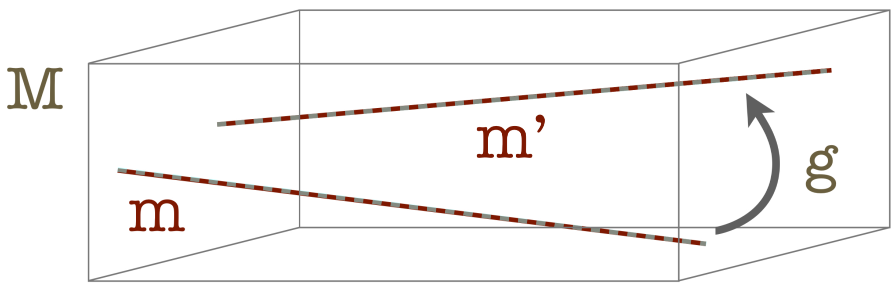
14. Ce qui suppose un choix d'identification des espaces à chaque instant avec l'espace à un instant donné.

structures euclidiennes sont remplacées par une pseudo-métrique de signature $(+ \ - \ - \ -)$; qui est notée parfois,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Henri Poincaré
Nancy 1854
Paris 1912

Ce continuum, equipé de cette pseudo-métrique, est noté M ; il est appelé *espace de Minkowski*, ou de façon malheureuse *continuum espace-temps*. En effet, les notations dt, dx, dy et dz ci-dessus sont trompeuses, il n'existe pas de décomposition significative de l'espace de Minkowski en Espace et Temps, comme nous le verrons plus loin. Un point de cet espace est toujours appelé un *évènement*. Les mouvements inertiels de la mécanique d'Einstein (ou *Relativité Restreinte*) sont les droites affine, comme *parties* de M ; ce sont précisément les géodésiques (orientées) de la pseudo-métrique ds^2, c'est-à-dire les solutions (non paramétrées mais orientées) de l'équation différentielle $d^2X/ds^2 = 0$. La nature des genres différents de ces solutions (*espace*, *temps* et *lumière*) sont discuté dans tous les manuels de relativité, nous n'y ajouterons rien. Le groupe d'inertie de la relativité (restreinte) d'Einstein est le



Le *continuum* de Minkowski

Groupe de Poincaré :

- ⋆ C'est le groupe des transformations affines de M qui qui préservent la pseudo-métrique de Minkowski.

En particulier, toute transformation de Poincaré transforme un mouvement inertiel relativiste en un autre. C'est ce qui est suggéré par la figure ci-dessus. En choisissant une origine de M, le groupe de Poincaré est représenté par les matrices

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} LX + C \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} L \in \mathfrak{L} \\ C \in \mathbf{R}^4 \end{array} \right. ,$$

où $X \in \mathbf{R}^4$ et $\mathfrak{L}$ désigne le *Groupe de Lorentz*, c'est-à-dire le groupe des transformations linéaires qui préservent la pseudo-métrique de Minkowski. Nous envoyons aux ouvrages de référence sur la relativité restreinte pour plus de détails sur ce groupe.

Ainsi, de même que pour la mécanique aristotélicienne et la mécanique galiléenne, *la mécanique d'Einstein est la géométrie du groupe de Poincaré.*

Note. Il est d'usage de ne considérer du groupe de Poincaré, défini plus haut, que sa composante connexe. Il faut d'ailleurs noter que les conditions de préservation des orientations, dans les cas aristotélicien et galiléen, ont justement pour conséquence de choisir la composante connexe des groupes qui seraient définis sans cette condition.

Temps et simultanéité

Comme nous l'avons vu, la notion de Temps aristotélicien et la notion de *simultanéité* sont intimement liés, pour ne pas dire identiques. Nous allons les interpréter précisément à partir des constructions précédentes et en tirer certaines conséquences.

Le continuum $\mathcal{C}$ — qu'il désigne l'Espace-Temps d'Aristote, ou celui de Galilée, ou encore l'espace de Minkowski — considéré pour sa seule structure différentielle et affine, est unique et équivalent à $\mathbf{R}^4$. Sur ce continuum $\mathcal{C}$ agit naturellement le groupe G de la mécanique choisie, que ce soit le groupe d'Aristote, celui de Galilée ou encore le groupe de Poincaré. La *simultanéité des évènements* peut alors s'interpréter comme une fibration lisse

$$\tau\ : \mathcal{C} \to \mathsf{T},$$

où T est le temps d'Aristote, équivalent à la droite réelle $\mathbf{R}$ munie de sa structure euclidienne standard, orienté du passé vers le futur par une mesure de temps (c'est à dire un vecteur positif quelconque). Les évènements simultanés, correspondent aux *instants* — les éléments de T — et en sont, par définition, les préimages. Autrement dit, deux évènements x et x' sont simultanés s'ils appartiennent à la même *fibre* de τ, c'est-à-dire si $\tau(x) = \tau(x')$. La cohérence de la simultanéité, avec la mécanique choisie, correspond à l'équivariance de cette *temporalisation*, par le groupe de la mécanique. C'est-à-dire qu'il existe une application $\phi\ : \mathsf{G} \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{C}$ et pour tout $g \in \mathsf{G}$, on ait :

$$\tau(g(x)) = \tau(x) + \phi(g).$$

En effet, cela signifie seulement que *les évènements simultanés sont transformés en évènements simultanés par le groupe de la mécanique* et que cette transformation ne dépend que du groupe [15]. Ensuite, puisque que le groupe G agit sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $g(g'(x)) = (gg')(x)$, on déduit que l'application ϕ, qui est l'action du groupe de la mécanique sur T, est un homomorphisme (lisse) de G dans le groupe additif des nombres réels : $\phi(gg') = \phi(g)+\phi(g')$. Et puisque le temps aristotélicien s'écoule indéfiniment du passé vers le futur, cet homomorphisme est nécessairement surjectif.

Déclaration Un temps aristotélicien, pour une mécanique choisie, ne peut exister que s'il existe un homomorphisme (lisse) du groupe G de la mécanique, sur le groupe $(\mathbf{R}, +)$.

15. C'est en particulier ce qu'Einstein signifie quand il dit (voir plus haut) « *le temps absolu [est] indépendant de la position et des conditions du mouvement* ».

On déduit immédiatement de cette déclaration, la traduction mathématique de l'incompatibilité absolue entre l'existence d'un Temps aristotélicien et la relativité d'Einstein[16] :

Théorème Il n'existe pas d'homomorphisme lisse, du groupe de Poincaré sur la droite réelle $(\mathbf{R}, +)$.

DÉMONSTRATION — Soit $\phi : \mathsf{G} \to \mathbf{R}$ un homomorphisme du groupe de Poincaré G sur la droite réelle munie de l'addition. Considérons les groupes de Lorentz $\mathfrak{L}$ et $(\mathbf{R}^4, +)$, injectés dans G comme sous-groupes, de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathsf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathsf{L} \in \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathsf{C} \in \mathbf{R}^4,$$

et notons φ et f, les restrictions de ϕ à $\mathfrak{L}$ et $(\mathbf{R}^4, +)$,

$$\varphi(\mathsf{L}) = \phi \begin{pmatrix} \mathsf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{f}(\mathsf{C}) = \phi \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les restriction φ et f sont donc des homomorphismes (lisses) de $\mathfrak{L}$ et $(\mathbf{R}^4, +)$ dans $(\mathbf{R}, +)$. En décomposant les éléments de G de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathsf{L} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\phi \begin{pmatrix} \mathsf{L} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{f}(\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{L}). \tag{$\clubsuit$}$$

Mais $\mathsf{f}(\mathsf{C}) + \varphi(\mathsf{L}) = \varphi(\mathsf{L}) + \mathsf{f}(\mathsf{C})$, c'est-à-dire :

$$\varphi(\mathsf{L}) + \mathsf{f}(\mathsf{C}) = \phi \begin{pmatrix} \mathsf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} \mathsf{L} & \mathsf{LC} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{f}(\mathsf{LC}) + \varphi(\mathsf{L}).$$

Donc $\mathsf{f}(\mathsf{LC}) = \mathsf{f}(\mathsf{C})$, c'est-à-dire : f est un homomorphisme de $(\mathbf{R}^4, +)$ dans $\mathbf{R}$, invariant par le groupe de Lorentz. Réciproquement, il est immédiat de vérifier que toute paire (f, φ) de tels homomorphismes définit, par ($\clubsuit$), un homomorphisme $\phi : \mathsf{G} \to \mathbf{R}$, et cette décomposition est unique.

Ensuite, puisque f est lisse c'est non seulement un homomorphisme mais une 1-forme linéaire sur $\mathbf{R}^4$. Et puisque la seule forme linéaire sur $\mathbf{R}^4$, invariante par le groupe de Lorentz, est la forme nulle :

$$\mathsf{f} = 0 \quad \text{et} \quad \phi \begin{pmatrix} \mathsf{L} & \mathsf{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(\mathsf{L}).$$

Soit alors $\mathsf{K} \subset \mathfrak{L}$, le noyau de l'homomorphisme φ, et $\mathsf{H} = \varphi(\mathfrak{L}) \subset \mathbf{R}$ son image. Le groupe K un sous groupe distingué du groupe de Lorentz, qui est un groupe simple, donc $\mathsf{K} = \{\mathbf{1}\}$ ou $\mathfrak{L}$. L'homomorphisme φ étant différentiable, en considérant son application linéaire tangente en l'identité, on a : $\dim(\mathsf{K}) + \dim(\mathsf{H}) = \dim(\mathfrak{L})$. Puisque $\dim(\mathsf{H}) = 0$ ou 1, et $\dim(\mathsf{K}) = 0$

16. J'ai écrit cette démonstration du théorème parce qu'elle ne fait appel qu'à un seul résultat un peu sophistiqué : le groupe de Lorentz est simple.

ou $\dim(\mathfrak{L}) = 6$, il ne reste comme possibilité que $\dim(\mathsf{K}) = 6$ et $\dim(\mathsf{H}) = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$. Donc $\phi = 0$, et il n'existe pas d'homomorphisme surjectif du groupe de Poincaré sur la droite réelle. $\square$

R1 — La notion d'*instant*, comme *simultanéité* d'évènements, exprime clairement la différence entre le temps comme paramètre chronologique, accident au mouvement, et le Temps d'Aristote, absolu, qui se veut un référentiel unique et cohérent pour tous les mouvements. Le premier est à la source, dans la description du mouvement, le deuxième est (ou n'est pas) au but de la fibration par la simultanéité.

R2 — Le théorème précédent montre en particulier, clairement, la futilité des tentatives qu'on peut rencontrer dans la littérature, ici ou là, de rendre la théorie de la relativité d'Einstein, aristotélicienne.

En guise de conclusion provisoire

Après ce cheminement dans la pensée scientifique sur la nature des mouvements, que pouvons nous déjà en conclure ? Premièrement, que les catégories classiques d'Espace et de Temps ont été définitivement dépassées et remplacées, au moins temporairement, par un *continuum* $\mathcal{C}$, équipé dans chaque cas d'une certaine structure. Dans chacun de ces cas, nous avons isolé une famille de mouvements particuliers [17], que nous avons appelés *mouvements inertiels*. Dans chaque cas aussi, la préservation des structures et des mouvements inertiels, distinguent un groupe de transformation du continuum, son *groupe d'inertie*, qui définit par lui-même une géométrie. Cette géométrie peut-être assimilé à la mécanique en question, et même la définir. C'est le cas si on estime que les objets de chacune de ces mécaniques sont des espaces équipés d'une certaine action du groupe d'inertie [18].

Nous avons pu aussi constater que c'est l'expérience, et l'expérience uniquement, qui permet de décider — ou choisir — quel est le groupe d'inertie de la nature : sans l'expérience du bateau, réalisée par Gassendi, pas de groupe de Galilée, et sans l'expérience de Michelson et Morley, pas de groupe de Poincaré.

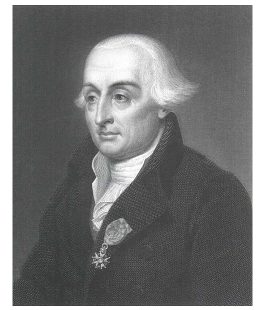
Avec un peu d'attention, nous constatons aussi que l'espace des mouvements inertiels est un espace homogène du groupe d'inertie, de même que le continuum $\mathcal{C}$. Le groupe semble primer sur les différents espaces mis en cause par ce déroulement épistémologique. Tout ce chemin n'aurait été utile que pour en arriver au groupe d'inertie ? C'est bien possible [19].

17. C'est à dire, certaines parties particulières du continuum.

18. En particulier, les *moments* des systèmes dynamiques isolés, pour ces mécaniques, s'interprètent naturellement comme les éléments du dual de l'algèbre de Lie du groupe d'inertie.

19. C'est en tous les cas l'opinion de Souriau, qu'il développe en particulier dans son article sur *Les groupes comme universaux.*

Nous allons toutefois continuer notre lecture de l'histoire de la mécanique, et découvrir que les espaces des mouvements inertiels en question sont naturellement équipés d'une certaine *structure symplectique* qui semble jouer un rôle important en mécanique. C'est ce qui va nous occuper maintenant.



Joseph-Louis Lagrange
Turin 1736
Paris 1813

4. La fécondation par Lagrange

Par sa méthode de la variation des constantes, appliquée à la question de la stabilité du système des planètes [20], et ses premiers éléments de calcul symplectique [21], par l'outil analytique qu'il développe, Lagrange nous affranchit techniquement des catégories d'Espace et de Temps et nous permet de travailler directement sur l'espace des mouvements.

Lagrange considère le mouvement d'une planète du système solaire (la Terre par exemple). Il sait intégrer les équations de Newton pour le système à deux corps, qu'il ramène évidemment à un corps attiré par un centre fixe. Ces mouvements se déroulent le long de trajectoires elliptiques [22] selon une *loi horaire* en accord avec la loi des aires de Kepler. Chaque mouvement de ce système est entièrement caractérisé par six *constantes d'intégration* : les *éléments képleriens de la planète* ; cinq — notées a, b, h, i et k — pour la trajectoire ; et une sixième — notée c — pour la loi horaire. La constante a désigne le grand axe de l'ellipse, b son paramètre, les constantes h, i et k définissent le plan de l'ellipse et sa position dans le plan. La constante c, appelée *époque* est la date de passage de la planète au périhélie. Rappelons, qu'en accord avec la nature des équations du mouvement, chaque condition initiale (r, v, t) définit un mouvement unique — r et v étant les position et vitesse à un instant [23] donné t — et *de facto* six éléments képleriens. Considérant ensuite l'influence du reste du système sur la planète en question, Lagrange l'interprète comme une *perturbation* du système képlerien [24]. A chaque instant t est associée un mouvement de Kepler, le *mouvement osculateur* au mouvement vrai : celui qu'aurait la planète, pour les conditions initiales (r, v, t) si elle n'était pas perturbée. Les constantes (a, b, c, h, i, k) deviennent ainsi *variables*, c'est-à-dire fonction du temps t. La variation des éléments képlériens, Lagrange l'exprime en fonction des différences partielles du potentiel de perturbation Ω, rapporté aux éléments de la planète. Ces différences partielles sont affublées de coefficients, qu'il note sous forme de parenthèses à deux entrés — les *parenthèses de Lagrange* — comme le montre ce fac-similé suivant, extrait de sa Mécanique Analytique :

---

20. Voir les articles fondateurs de Lagrange [Lag-08, Lag-09, Lag-10] et sa *Mécanique Analytique*, deuxième édition.

21. Voir en particulier [Sou-86] et [Igl-98].

22. Lagrange ne considère *a priori* que les mouvements elliptiques, mais ce n'est pas là une restriction majeure.

23. Rappelons que nous somme dans le cadre galiléen, et nous parlons d'instant aristotélicien.

24. Pour une discussion plus détaillée voir, par exemple, [Igl-98].

y, z, x′, y′, z′ (art. 31), et les variations des éléments *a*, *b*, *c*, … deviendront de la forme

$$da = \left[+ (a,b)\frac{\partial\Omega}{\partial b} + (a,c)\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \ldots \right] dt,$$

La variation du grand axe

Il montre ensuite une propriété importante de ces parenthèses : elles ne dépendent que des éléments de la planète. Autrement dit, elles sont définies sur l'espace des éléments képleriens seulement. Il donne aussi leurs expressions en fonction des différentielles partielles des conditions initiales :

les coefficients représentés par les symboles (a,b), (a,c), … étant exprimés ainsi :

$$(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x'}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y'}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z'}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x'} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y'} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial z'},$$

Coordonnées contravariantes de la forme symplectique

Ce qui montre immédiatement que ces parenthèses sont antisymétriques. Enfin, Lagrange exprime les différences partielles du potentiel de perturbation [25] Ω par des termes inverses qu'il note sous forme de crochet, les *crochets de Lagrange* :

Substituant ces valeurs et ordonnant les termes par rapport aux variations *da*, *db*, *dc*, …, on aura

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} dt = [a,b]\,db + [a,c]\,dc + [a,h]\,dh + \ldots,$$

Inversion des parenthèses par des crochets

De même que les parenthèses, les crochets de Lagrange sont antisymétriques et ne dépendent que des éléments képleriens. Autrement dit, la matrice définie pas les crochets de Lagrange, sur l'espace des éléments de la planète est antisymétrique et inversible. Aujourd'hui, nous disons que ces crochets (et parenthèses) définissent une *structure* sur l'espace des éléments de la

25. Ce que l'on peut considérer comme les *forces de perturbation*, rapportées aux éléments de la planète.

planète. Plus tard, on montrera que ces crochets sont les *composantes covariantes* d'une 2-forme différentielle, définie sur l'espace des *mouvements képleriens* ; dont les parenthèses sont les *composantes contravariantes.* L'hypothèse que la perturbation dérive d'un potentiel implique, de plus, que cette 2-forme est fermée. On dit aujourd'hui de cette structure qu'elle est *symplectique.* En terme moderne, les équations de variation des éléments de la planète écrites plus haut définissent le flot du *gradient symplectique* du potentiel de perturbation. Ainsi la dynamique du reste du système s'interprète directement sur l'espace des éléments képlériens — ou *espace des mouvements képleriens* — sans faire intervenir l'Espace-Temps ; ou si l'on préfère : en absorbant l'Espace-Temps dans la structure même de l'espace des mouvements.

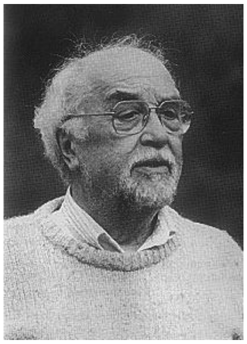
De façon analogue, dans le cadre de la mécanique newtonienne, on peut décrire le mouvement d'un point matériel attiré par une force sur l'espace des mouvements inertiels galiléens, comme les courbes intégrales du gradient symplectique du potentiel de la force en question, qui est considérée comme une perturbation du système inertiel. En effet, comme nous le verrons plus loin, l'espace des mouvements inertiels galiléens est aussi pourvu d'une structure symplectique naturelle. Ce que nous disons pour un système galiléen peut s'étendre aussi à un système relativiste d'Einstein, dans la mesure où l'espace des géodésiques de la métrique de Minkowski est aussi équipé naturellement d'une structure symplectique [26]

En conclusion de ce chapitre, les travaux préliminaires de Lagrange sur la variation des éléments des planète sont précurseurs d'une nouvelle vision du mouvement, comme un élément d'un ensemble structuré, et dont la structure peut pallier avantageusement à l'abandon des catégories aristotéliciennes dépassées d'Espace et de temps : le mouvement ne nécessite plus d'être décomposé de façon impérative pour être étudié ; et des outils mathématiques nouveaux rendent cette rupture épistémologique opératoire.

5. Le renouvellement par Souriau

Jean-Marie Souriau a été certainement un des premiers, sinon le premier, à envisager la recomposition de la mécanique autour de l'idée centrale de *mouvement* : le mouvement en tant que tel, et non l'une ou l'autre de ses représentations. C'est dans son ouvrage *Structure des Systèmes Dynamiques* qu'il introduit la notion de *variété des mouvements*, qui va porter toutes les structures importantes de la mécanique telle qu'il va suggérer de la reconstruire. Cette idée, que l'ensemble des mouvements d'un système dynamique

26. Tout au moins les géodésiques du genre temps. La question d'une structure sur l'ensemble des géodésiques de l'espace de Minkowski est d'une autre nature. Il apparait une structure plus riche, que nous ne discuterons pas ici, et que j'ai nommé — faute de mieux — *structure cosymplectique conforme.* La question particulière de la perturbation des géodésiques de l'espace de Minkowski est toutefois un peu plus confuse.



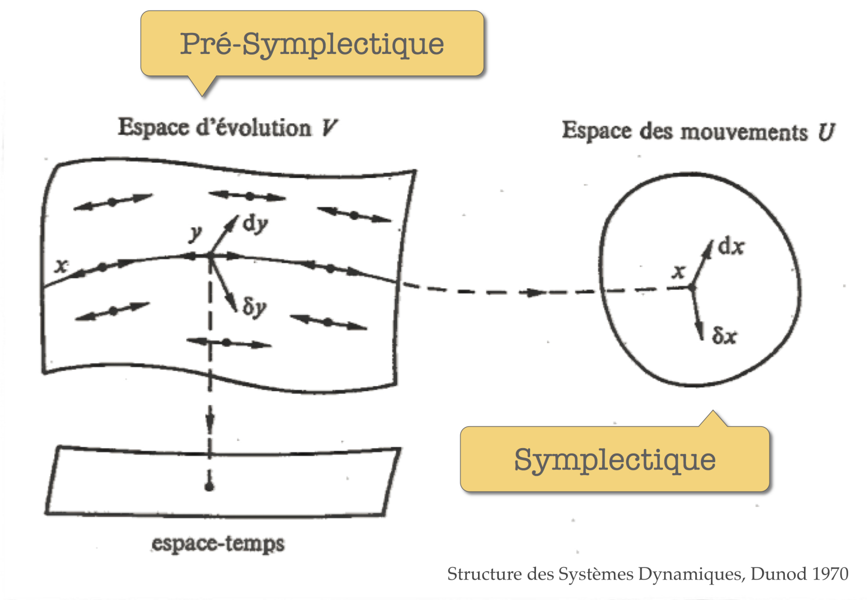
Jean-Marie Souriau
Paris 1922

puissent être considérés pour ce qu'ils sont, et qu'ils constituent une variété [27], n'a pas tout de suite été appréciée, ou comprise, ou a été simplement négligée par ses contemporains.

A propos de la mécanique telle qu'elle existe jusque dans les années 1950, Souriau écrit :

> « ***La mécanique analytique n'est pas une théorie périmée****; **mais** il apparaît que* ***les catégories qu'on lui attribue classiquement*** *:* espace de configuration*,* espace des phases*,* formalisme lagrangien*,* formalisme hamiltonien*,* ***le sont****; ceci simplement parce qu'elles ne possèdent pas la covariance requise ; en d'autres termes parce qu'****elles sont en contradiction avec la relativité galiléenne****; a fortiori,* ***elles sont inadéquates à la formulation de la mécanique relativiste****, au sens d'Einstein.* »

La déclaration est péremptoire et balaie d'une formule lapidaire ce qui fait le quotidien d'une bonne partie des physiciens. La figure suivante, extraite de son livre, résume sa vision :



De l'évolution au mouvement

L'espace d'évolution [28] est le lieu naturel dans lequel s'*imprime* les mouvements, comme caractéristiques d'une 2-forme fermée présymplectique : essentiellement la dérivée extérieure de la forme de Cartan [Car-22]. Cet

27. Séparée ou non.
28. Certains l'appellent *espace des phases étendu.*

espace d'évolution est aussi l'*espace des conditions initiales* du système différentiel définissant le système. Pour un point matériel, ce sera l'ensemble V des position et vitesse à un instant donné, c'est à dire l'espace des triplets (r, v, t). Pour chaque t fixé, l'ensemble V_t des (r, v) est l'*espace des phases* à l'instant t. Une grande confusion règne parfois car ces espaces sont identifiés d'une façon arbitraire, et les mouvements qui sont *dépliés* dans l'espace d'évolution se trouvent projetés et écrasés dans un de ces espaces de phase.

Le quotient de l'espace d'évolution par le feuilletage caractéristique de la forme présymplectique, c'est-à-dire l'ensemble de ces caractéristiques, est toujours une variété (séparée ou non), qui se trouve équipée naturellement d'une forme symplectique ; ce qui n'est pas le cas du quotient d'un espace des phases par la dynamique hamiltonienne, dont il hérite après écrasement de l'espace d'évolution.

La construction de la forme présymplectique, qui va inscrire la dynamique sur l'espace d'évolution, consiste pour Souriau à *chasser les dénominateurs* de l'équation de Newton. En cela il se distingue de Lagrange qui avait introduit la forme symplectique directement sur l'espace des solutions, un siècle et demi avant, comme nous l'avons vu précédemment. Voici rapidement ce dont il s'agit :

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad \& \quad v = \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad m\,dv - F\,dt = 0 \quad \& \quad dr - v\,dt = 0.$$

Souriau introduit alors la forme présymplectique σ en antisymétrisant ce système différentiel [29] :

$$\sigma(dt, \delta t) = \langle m\,dv - F\,dt, \delta r - v\delta t\rangle - \langle m\delta v - F\delta t, dr - v\,dt\rangle.$$

Il faut faire attention toutefois aux notations, Souriau utilise les caractéristiques d et δ pour désigner des vecteurs tangents : dy et δy sont des vecteur tangents à V au point $y = (r, v, t) \in \mathrm{V}$. Les solutions du système différentiel de Newton décrit plus haut sont les courbes intégrales de la distribution du feuilletage caractéristique $y \mapsto \ker(\sigma)$. L'ensemble de ces caractéristiques hérite alors naturellement d'une structure symplectique.

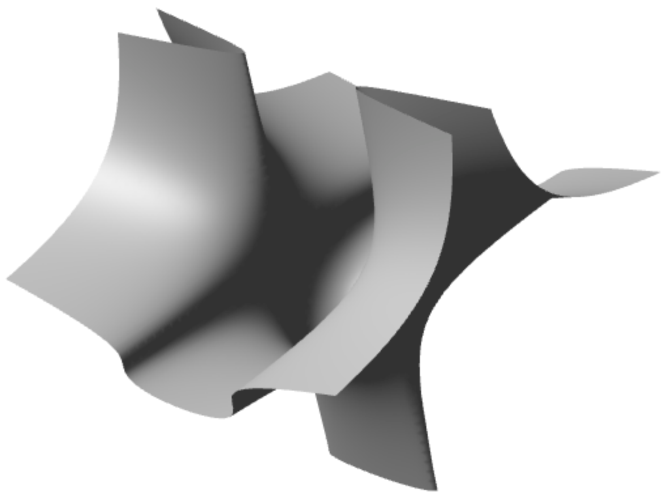
On peut noter déjà que savoir faire la différence entre la variété des mouvements et les différents espaces des phases, c'est-à-dire la famille des position-vitesse à des instants différents, est capitale — comme le montre par exemple les travaux ultérieurs sur la régularisation du problème à deux corps [30]. En effet, après régularisation (et inclusion des mouvements répulsifs) l'espace des solutions du problème général de Kepler-Newton est une variété $\mathcal{K}$ de dimension 6 (équipée d'une certaine forme symplectique) équivalente à la variété algébrique définie par le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \|A\|^2 - fx^2 & = & 1 \\ y^2 - f\|B\|^2 & = & 1 \end{array}\right. \quad \& \quad \left\{\begin{array}{rcl} A \cdot B - xy & = & 0 \\ xy - f\tau & = & 0, \end{array}\right.$$

29. La 2-forme σ est naturellement antisymétrique, elle est fermée lorsque F dérive d'un potentiel.

30. Il s'agit de caractériser le plus grand quotient séparé de l'espace des mouvements.

où A et B sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et x, y, f, τ sont des réels [Sou-83]. Il est difficile dans cette représentation de deviner, pour un point arbitraire de cette variété $\mathcal{K}$, une quelconque condition initiale, ou de repérer un espace des phases. La figure suivante donne une idée de la nature de cette variété (où on a fait A et B réels). C'est un raccordement des espaces tangents à la sphère S^3 (représenté par le tube descendant) et la pseudo-sphère H^3 (représenté par les ailes montantes), le long d'une sous-variété de type $TS^2 \times \mathbf{R}$, équivalente à $S^2 \times \mathbf{R}^3$, (ici deux droites).



La variété de Newton $x^2 - z^3y^2 = 1$.

Cet exemple illustre clairement le passage parfois subtil de l'espace d'évolution, qui est ici $Y = [\mathbf{R}^3 - \{0\}] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, à l'espace $\mathcal{K}$ des solutions du système dynamique [31]. Mais il existe évidemment un flêche bien définie $V \to \mathcal{K}$ qui associe à chaque condition initiale (r, v, t) son mouvement régularisé [32].

Le traitement des symétries est aussi particulièrement affecté par cette restructuration de la mécanique. Dans ce contexte formel, une symétrie au sens banal devient une action lisse d'un groupe de Lie, sur la variété d'évolution, qui préserve — au moins — le feuilletage caractéristique de la structure présymplectique. Souriau demande davantage : que le groupe respecte la forme elle-même, ce qui entraine le respect du feuilletage caractéristique, induit une action du groupe sur l'espace des mouvements, et assure aussi l'héritage d'une structure symplectique sur l'espace des mouvement. Ces groupes, Souriau les appellent *groupes dynamiques.* Quand il écrit plus haut : « *elles ne possèdent pas la covariance requise* », il pense en particulier au lagrangien classique de la particule libre, qui n'est pas invariant par le groupe de Galilée,

31. C'est-à-dire lorsqu'on en cherche un représentant accessible.
32. J'ignore si cette variété $\mathcal{K}$ est une orbite coadjointe d'un groupe de Lie.

ni la forme de Cartan qui en dérive [33]. En revanche, la dérivée extérieure de la forme de Cartan est invariante. C'est ce qui conduit Souriau à privilégier l'invariance de la structure présymplectique, et à évacuer les « catégories classiques ». Il en conclut, comme une « axiomatique » de la mécanique :

I. *L'ensemble des mouvements d'un système dynamique est une variété symplectique connexe.*
II. *Si plusieurs systèmes dynamiques évoluent indépendamment, la variété des mouvements du système est le produit direct symplectique des variétés des systèmes composants.*
III. *Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet, suivant le cas, le groupe de*
   – *Galilée*
   – *Poincaré*

   comme groupe dynamique.

Cette déclaration met définitivement le mouvement, accompagné des outils de la géométrie symplectique, au coeur des préoccupations de la mécanique. On peut dire que c'est là que sont remplacées les catégories aristotéliciennes classiques par la catégorie du *Mouvement*.

On ne peut achever ce paragraphe sans évoquer l'*application moment* introduite par Souriau, toujours dans *Structure des Systèmes Dynamiques*. C'est l'outil fondamental qui code ce qu'impose à la structure symplectique — ou présymplectique — la symétrie définie par l'action d'un groupe dynamique. Techniquement, c'est une application $\psi : V \to \mathcal{G}^*$, où V est l'espace des mouvements (ou bien l'espace des conditions initiales) en question, et $\mathcal{G}^*$ est l'*espace des moments*, c'est-à-dire dans le cas ordinaire d'un groupe de Lie, le dual de son algèbre de Lie [34]

Parmi les conséquences de cette application moment qu'on ne peut discuter toutes, il faut noter ceci, qui est l'aboutissement du théorème de Nœther [35], dans ce cadre général de la mécanique symplectique

Théorème (Nœther-Souriau) L'application moment est constante sur les caractéristiques de la forme présymplectique.

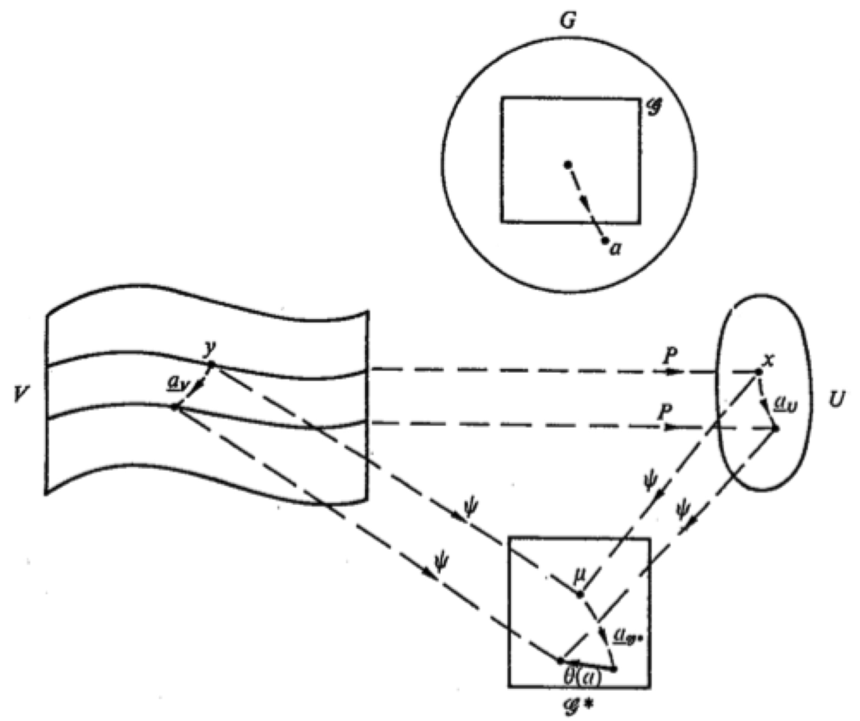
Ce théorème généralise le cas particulier de Nœther où la forme présymplectique dérive d'un lagrangien invariant. Il dépasse cependant largement ce cadre, comme en témoigne un de ses avatars : le défaut d'équivariance de l'application moment définit une classe de cohomologie $[\theta]$ du groupe dans l'espace de ses moments, comme l'indique la figure ci-dessus.

---

33. On peut noter, au passage, que Souriau privilégie l'action de groupes de Lie, qui implique la structure globale de la variété des mouvements, plutôt que l'action infinitésimale d'algèbre de Lie qui n'impliquerait que la structure locale.

34. Cette application moment est généralisée dans le cadre difféologique dans [PIZ-10], l'espace $\mathcal{G}^*$ est alors l'espace des 1-formes invariantes à gauche sur le groupe difféologique.

35. À propos des théorèmes de conservation, et de l'attribution de ce théorème à Emmy Nœther, lire la discussion dans le livre savant d'Yvette Kosmann-Schwarzbach [Kos-10].



Structure des Systèmes Dynamiques, Dunod 1970

L'application moment de Souriau

Dans le cas du groupe de Galilée, cette classe de cohomologie représente la *masse* du système ; qui se trouve ainsi doté d'un statut formel précis. Il faut noter, à ce propos, que cette *classe de Souriau* traduit aussi l'inexistence d'un lagrangien invariant pour la structure présymplectique qui en dérive, ainsi qu'il l'écrit lui-même :

> de Galilée. Comme cette classe de cohomologie n'est *jamais nulle*, il en résulte que *le lagrangien du principe de Hamilton n'est pas invariant par le groupe de Galilée*, quels que soient le choix des potentiels et de la jauge
>
> Structure des Systèmes Dynamiques, Dunod 1970

Le cocycle de Souriau

Ce nouveau cadre formel et les outils qui l'accompagne permettent de revisiter aussi la construction classique de décomposition du mouvement autour du centre de gravité.

Théorème du barycentre (Souriau) Si la classe de cohomologie [*la masse totale du système*] du moment de l'action du groupe de Galilée sur un système dynamique isolé n'est pas nulle, la variété des mouvements (V, σ) est le produit symplectique de $(\mathbf{R}^6, \mathrm{can})$ [*les mouvements du centre de gravité*] par une variété symplectique (M_o, σ_o) [*les mouvements propres autour du centre de gravité*].

– Le groupe de Galilée est groupe dynamique de $(\mathbf{R}^6, \mathrm{can})$.

– $\mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}$ est groupe dynamique de (M_o, σ_o).

Ainsi, l'ancien principe du barycentre — approximatif et énoncée, dans les manuels de physique, au cas par cas — trouve son cadre formel naturel. La *décomposition barycentrique* est un théorème de géométrie symplectique. Il ne fait intervenir ni la catégorie aristotélicienne de Temps ni celle d'Espace.

► *La nouvelle catégorie des Mouvements, équipée des outils de la géométrie, est manifestement opératoire*

Elle est même supérieurement opératoire. En effet, le théorème ci-dessus ne présuppose rien de la nature particulière du système : qu'il soit une assemblée de points matériels, ou qu'il soit un solide ou un corps élastique continu etc.. Il s'applique indifféremment à tout système dynamique pourvu que son espace des mouvements soit une variété symplectique [36].

Toujours à propos de la structure globale de l'espace des mouvements, la notion de *système* (particule) *élémentaire* trouve sa place dans la classification des variétés symplectiques homogènes, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème (Kirillov-Kostant-Souriau) Une variété symplectique (M, ω), homogène sous l'action d'un groupe de Lie G agissant par transformations hamiltoniennes est, à un revêtement près, une orbite coadjointe de G.

L'outil principal de la démonstration de ce théorème est encore l'application moment qui réalise le revêtement sur l'orbite coadjointe. Dans le cas général l'orbite coadjointe peut être *linéaire* ou *affine* suivant que la classe du cocycle de Souriau θ, que l'on a vu plus haut, est nulle ou non. Les systèmes élémentaires classiques sont alors classifiés par les orbites coadjointes des groupes de Galilée ou de Poincaré, selon la mécanique considérée.

Nous arrêtons là la lecture de *Structure des Systèmes Dynamiques* en espérant qu'après ces morceaux choisis de lecture symplectique [37], le lecteur est convaincu qu'on n'a rien perdu en abandonnant les catégories classiques aristotéliciennes (et de leur dérivées) ; qu'au contraire, la géométrie symplectique a permis de remettre le mouvement *per se* au cœur de la mécanique, sans rien perdre de capacité opératoire, et en gagnant avantageusement au niveau conceptuel.

---

36. Ce théorème a par ailleurs d'autres extensions [IZZ-12], inspiré par les travaux de François Ziegler en quantification géométrique [Zie-96].

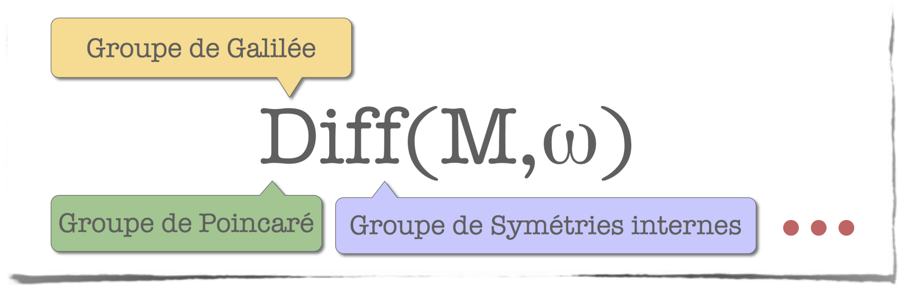
37. En particulier nous ne commenterons pas le programme de Souriau de quantification géométrique qui s'appuie aussi sur cette recomposition de la mécanique.

6. L'intrusion de la difféologie

Dans la recomposition de la mécanique autour de l'espace des mouvements M, la structure symplectique, que nous noterons dorénavant ω, n'arrive pas nue, mais habillée de son groupe d'automorphismes :

$$\mathrm{Diff}(M,\omega) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \mid \varphi^*(\omega) = \omega\}$$

Ce groupe est si grand qu'il est transitif [38] sur M, et c'est à travers lui que la nature de la mécanique va s'exprimer : pour les systèmes galiléens, il va contenir le groupe de Galilée ; pour les systèmes soumis à la relativité d'Einstein, il va contenir le groupe de Poincaré. Il peut aussi contenir d'autres groupes de symétries internes qui pourraient apparaitre dans certains cas particulier. Il est lui-même, l'ultime symétrie des mouvements.



La géométrie renouvelée

Ainsi, la géométrie qu'on a pu croire perdue avec l'abandon des figures dans la *Mécanique Analytique* de Lagrange, est renouvelée et enrichie.

▶ *La **symplification** de la mécanique s'accompagne d'un retour et d'un élargissement de la géométrie, au sens de Klein.*

Techniquement, $\mathrm{Diff}(M,\omega)$ est muni de sa *difféologie fonctionnelle* de *groupe difféologique* [PIZ-05-11]. Un théorème récent montre que toute action lisse d'un groupe de Lie G sur une variété V s'identifie nécessairement avec son image dans le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(V)$, pour la difféologie fonctionnelle [39] [IZK-11]. C'est-à-dire, que l'homomorphisme $h : G \to \mathrm{Diff}(V)$ qui est *a priori* seulement lisse, est en fait ce qu'on appelle une *induction*, ou si l'on préfère : un difféomorphisme de G sur son image $h(G) \subset \mathrm{Diff}(V)$, pour la difféologie induite. En d'autres termes, il n'existe pas de différence entre une action lisse d'un groupe de Lie sur une variété et un sous-groupe du groupe de ses difféomorphismes, qui est une variété pour la difféologie induite de la difféologie fonctionnelle. On peut donc parler de sous-groupes de Lie d'un groupe de difféomorphismes sans ambiguité, plutôt que d'actions lisses d'un groupe de Lie. Ainsi, on pourrait dire que

38. M est supposée connexe, $\mathrm{Diff}(M,\omega)$ est de dimension infinie. Précisément, ce groupe est n-transitif, avec $\dim(M) = 2n$.

39. Pour une variété séparée à base dénombrable.

► *La mécanique, en tant que géométrie, est décrite de façon globale par le groupe des automorphismes* $\mathsf{Diff}(\mathsf{M}, \omega)$*, et de façon particulière par les sous-groupes de Lie qu'il contient.*

Compte tenu du théorème de classification des systèmes élémentaires cité plus haut, si l'on se souvient que le groupe des automorphismes $\mathsf{Diff}(\mathsf{M}, \omega)$ agit de façon transitive sur M (supposée connexe) [Boo-69], il est naturel d'imaginer que (M, ω) est équivalente à une orbite coadjointe du groupe de tous ses symplectomorphismes. C'est ce qu'énonce le théorème suivant [PIZ-10, articles 10.5 et 10.5], et qui nous informe d'une certaine nature particulière des variétés symplectiques, et donc des espaces de mouvements selon Souriau.

Théorème Soit M une variété connexe séparée et soit ω une 2-forme fermée sur M. La forme ω est symplectique si et seulement si :
1. M est homogène pour le groupe des automorphismes $\mathsf{Diff}(\mathsf{M}, \omega)$.
2. Le moment universel $\mu_\omega : \mathsf{M} \to \mathcal{G}^*_\omega/\Gamma_\omega$ est injectif.

Ou, encore :
1'. M est homogène pour le sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens $\mathsf{Ham}(\mathsf{M}, \omega) \subset \mathsf{Diff}(\mathsf{M}, \omega)$.
2'. Le moment hamiltonien universel $\bar{\mu}_\omega : \mathsf{M} \to \mathcal{H}^*_\omega$ est injectif.

Pour l'énoncé d'un tel théorème, il a fallu élargir la catégorie des variétés différentielles, c'est le rôle de la difféologie. Les notions d'application moment universel et d'orbite coadjointe, linéaire ou affine sont à considérer dans ce cadre. Rappelons seulement que $\mathcal{G}^*_\omega$ désigne l'espace des moments de $\mathsf{G}_\omega = \mathsf{Diff}(\mathsf{M}, \omega)$, c'est-à-dire l'espace des 1-formes invariantes à gauche sur G_ω, Γ_ω est le *groupe d'holonomie* de la 2-forme ω et $\mathcal{H}^*_\omega$ est l'espace des moments du groupe des difféomorphismes hamiltoniens $\mathsf{Ham}(\mathsf{M}, \omega)$. Nous renvoyons le lecteur à l'article cité plus haut pour une description technique de ces espaces et la démonstration de ce théorème. Finalement, indépendamment de leur topologie, homotopie etc., en ce qui concerne leur structure globale :

► *Tout espace des mouvements, au sens de Souriau, est une orbite coadjointe de son groupe d'automorphismes ou d'un de ses sous-groupes.*

Tout cela nous éclaire en partie sur la géométrie globale de l'espace des mouvements, mais qu'en est-il de la dynamique ? C'es-à-dire de la nature de chaque mouvement, considéré individuellement. La réponse est partiellement contenue dans le théorème suivant.

Théorème Soit ω une 2-forme fermée sur une variété séparée M. Si M est homogène sous l'action du groupe des difféomorphismes hamiltoniens $\mathsf{Ham}(\mathsf{M}, \omega)$, alors les caractéristiques de ω coïncident avec les composantes connexes des préimages du moment universel hamiltonien $\bar{\mu}_\omega : \mathsf{M} \to \mathcal{H}^*_\omega$. En termes simples, le moment hamiltonien $\bar{\mu}_\omega$ intègre la distribution caractéristique $m \mapsto \ker(\omega)$.

Démonstration — Soit $\mathsf{p} \in \mathsf{Paths}(\mathsf{M}) = \mathsf{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathsf{M})$, un chemin dans M. La valeur du *moment universel des chemins* Ψ_ω en p, évalué sur une

n-plaque $F : U \to \mathrm{Diff}(M, \omega)$ est donnée, selon [PIZ-10, §10], par :

$$\Psi_\omega(p)(F)_r(\delta r) = \int_0^1 \omega_{p(t)}(\dot{p}(t), \delta p(t))\ dt,$$

où $r \in U$ et $\delta r \in \mathbf{R}^n$, δp est le relèvement suivant, du chemin p, à l'espace tangent TM :

$$\delta p(t) = [D(F(r))(p(t))]^{-1} \frac{\partial F(r)(p(t))}{\partial r}(\delta r) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le théorème de Nœther s'exprime ici clairement, si m and m' sont sur la même caractéristique, alors ils sont les extrémités d'un chemin p tracé dans la caractéristique, et donc en tout point $t \in \mathbf{R}$, $\omega(\dot{p}(t), \cdot) = 0$, d'où $\Psi_\omega(p)(F) = 0$ *i.e.* $\Psi_\omega(p) = 0$. Restreint au sous-groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega) \subset \mathrm{Diff}(M, \omega)$, cela donne $\bar{\Psi}_\omega(p) = 0$, où $\bar{\Psi}_\omega$ est le moment universel hamiltonien des chemins ; mais $\bar{\Psi}_\omega(p) = \bar{\mu}_\omega(m') - \bar{\mu}_\omega(m)$, d'où $\bar{\mu}_\omega(m) = \bar{\mu}_\omega(m')$.

Réciproquement, supposons que m and m' soient connectées par un chemin p tel que $\bar{\mu}_\omega(p(t)) = \bar{\mu}_\omega(m)$ pour tout t. Soit $s \mapsto p_s$ défini par $p_s(t) = p(st)$, pour tout s et t. Alors, $\bar{\mu}_\omega(p_s(1)) = \bar{\mu}_\omega(p_s(0))$, c'est-à-dire $\bar{\Psi}_\omega(p_s) = 0$, pour tout s. Mais, après un changement de variable, et en notant que $\delta p_s(t) = \delta p(st)$, on a pour tout s,

$$0 = \bar{\Psi}_\omega(p_s)(F)_r(\delta r) = \int_0^s \omega_{p(t)}(\dot{p}(t), \delta p(t))\ dt,\ \ \textit{i.e.}\ \omega_{p(t)}(\dot{p}(t), \delta p(t)) = 0,$$

pour tout t, où δp est défini plus haut. Soit alors $\nu \in T_{p(t)}M$, il existe un chemin c dans M tel que $c(0) = p(t)$ et $\dot{c}(0) = \nu$. Mais nous avons supposé que M est homogène sous $\mathrm{Ham}(M, \omega)$, c'est-à-dire que pour tout $m \in M$ l'application orbite $\mathbf{m} : \varphi \mapsto \varphi(m)$, de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ vers M, est une subduction. Donc, en choisissant $m = p(t)$, il existe un relèvement lisse $s \mapsto F(s)$ défini sur un petit voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ tel que $F(s)(p(t)) = c(s)$; on peut même choisir $F(0) = \mathbf{1}_M$. Ainsi, pour $s = 0$ and $\delta s = 1$, on a :

$$\delta p(t) = \left.\frac{dF(s)(p(t))}{ds}\right|_{s=0} = \dot{c}(0) = \nu.$$

Ainsi, pour tout $\nu \in T_{p(t)}M$, $\omega(\dot{p}(t), \nu) = 0$, *i.e.* $\dot{p}(t) \in \ker(\omega)$ pour tout t. Donc, si deux points sont connectés par un chemin p tracé dans une composante connexe d'une préimage d'une valeur de $\bar{\mu}_\omega$, le chemin p est contenu dans une feuille de la distribution caractéristique $m \mapsto \ker(\omega)$, c'est-à-dire dans une caractéristique de ω.

En conclusion, les caractéristiques de ω sont contenues dans les composantes connexes des préimages du moment hamiltonien universel $\bar{\mu}_\omega$ et réciproquement, elles coïncident donc. □

Autrement dit, sur une *structure dynamique* du type (M, ω), considérée dans le théorème précédent,

► *L'application moment universelle capture la dynamique : les caractéristique du moment universel sont les mouvements de la structure dynamique.*

Ce théorème et son interprétation appelle quelques remarques :

R1 — La condition d'homogénéité du groupe des transformations hamiltoniennes est trop forte. Elle implique en particulier que les caractéristiques sont difféomorphes entre elles, et même davantage : que l'espace M fibre sur l'image du moment hamiltonien. Il est souhaitable qu'on obtienne un résultat tout aussi édifiant en affaiblissant cette hypothèse.

R2 — L'espace vectoriel $\mathcal{H}^*_\omega$ des moments hamiltoniens est séparé.

DÉMONSTRATION — C'est un cas particulier qui vaut pour l'espace des moments $\mathcal{G}^*$ d'un groupe difféologique G quelconque. Soit α et β deux éléments de $\mathcal{G}^*$. Si $\alpha \neq \beta$ il existe alors une plaque P de G telle que $\alpha(P) \neq \beta(P)$: il existe un point r du domaine de P et un vecteur ν, tangent au domaine de P au point r tel que $\alpha(P)(r)(\nu) \neq \beta(P)(r)(\nu)$ (sans perdre de généralité on peut choisir $r = 0$ et même, par invariance à gauche, $P(0) = \mathbf{1}_M$). De toute façon, $f : \varepsilon \mapsto \varepsilon(P)(r)(\nu)$ est une fonction lisse de $\mathcal{G}^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(\alpha) \neq f(\beta)$. $\square$

En conséquence, pour une telle structure dynamique (M, ω) seulement présymplectique, et pas nécessairement homogène, l'application moment universelle hamiltonienne $\bar{\mu}_\omega$ va nécessairement « régulariser » l'espace des mouvements, c'est-à-dire l'espace des caractéristiques de ω.

Il est possible d'ailleurs, qu'appliquée au problème à deux corps dont il a été question plus haut, cette application moment $\bar{\mu}_\omega$ réalise la régularisation décrite par Souriau dans [Sou-83].

R3 — Le théorème précédent suggère l'identification d'un concept central à ce point de vue, celui de *structure dynamique* comme un couple (X, ω) ou X pourrait être *a priori* n'importe quel espace difféologique (il n'y a aucune raison de se limiter à des variétés, surtout si on pense à une extension aux théories de champs). Les *mouvements* de cette structure dynamique seraient alors, par définition [40], les *caractéristiques de l'application moment universelle* μ_ω (ou celles du moment universel hamiltonien $\bar{\mu}_\omega$) ; c'est-à-dire les composantes connexes des préimages du moment universel. L'image de l'application moment universel deviendrait alors une représentation particulière des *mouvements régularisés* de la structure dynamique ; la régularisation du système dynamique serait, de fait, automatique.

R4 — Par ce théorème qui identifie les mouvements, en tant que caractéristiques d'une forme présymplectique, avec les « caractéristiques » du moment

40. Cette approche évite la délicate discussion sur la nature du noyau d'une 2-forme en difféologie. En effet, par essence, un tel noyau serait un objet contravariant : ces objets dont la nature difféologique est justement discutable.

hamiltonien universel, on observe un renouvellement du sens et de l'étymologie. On peut lire en effet, dans le *Dictionnaire Étymologique de la Langue Française*, de L. Clédat [41], ceci :

> **Mouvoir** — Du latin movere. Dérivé : **mouvement** dont **moment** est le doublet savant (la durée se mesurant par des mouvements, cf. la locution *en un clin d'œil*).

7. RETOUR SUR LA NATURE DES MOUVEMENTS

Oublions momentanément les mouvements comme caractéristiques d'une forme presymplectique, ou comme caractéristiques de l'application moment universelle d'une structure dynamique (X, ω), ainsi que nous les avons considérés au paragraphe précédent. Régressons jusqu'à la « catégorie périmée » — comme dirait Souriau, plus haut — des espaces de configurations. Considérons un point matériel, dont l'espace de configuration est l'Espace. Du point de vue aristotélicien et même galiléen [42], un *mouvement* est une application lisse $m : t \mapsto r$ du Temps dans l'Espace. Le Temps et l'Espace étant *a priori* des espaces lisses (en l'occurrence des espaces affines) les mouvements sont une partie de $C^\infty(T, E)$. De façon générale, l'ensemble des applications lisses $C^\infty(X, Y)$ d'un espace difféologique X dans un autre Y possède une structure lisse canonique : la difféologie fonctionnelle. En conséquence, en dehors de toute autre structure dont ils pourraient être équipés,

► *Les espaces des mouvements galiléens* peuvent *être munis* a priori *de la structure difféologique d'espaces fonctionels.*

En ce qui concerne l'espace $\mathcal{M}_G$ des mouvements inertiels galiléens, c'est-à-dire les mouvements rectilignes uniformes, $[t \mapsto r + tv]$, avec r et v constants, on retrouve l'espace des mouvements isomorphe à $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. En effet, on vérifie facilement que les structures fonctionnelles des applications polynomiales coïncident avec les structures de variétés dont elles sont munis de façon ordinaires [PIZ-05-11, Exercice 41].

Malheureusement, cette approche est limité et insuffisante, elle tombe en défaut dès qu'il s'agit des mouvements inertiels $\mathcal{M}_E$ de la relativité d'Einstein : l'absence d'un temps aristotélicien (comme on l'a vu plus haut) nous interdit un paramétrage par un temps qui soit cohérent avec l'action du groupe de Poincaré [43]. Il ne nous reste plus qu'à considérer ces mouvements inertiels pour ce qu'ils sont : les droites affines de l'espace de Minkowski M, c'est-à-dire des sous-ensembles particuliers de cet espace M. Autrement dit,

$$\mathcal{M}_E \subset \mathfrak{P}(M).$$

41. Librairie Hachette et Cie, Paris 1914, page 389.
42. A condition d'avoir trivialisé le continuum Galiléen $\mathcal{C}$ en un produit $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$.
43. Pour ce qui concerne les géodésiques, pourrait choisir la « longueur » d'arc pour le genre temps ou espace, mais cela tombe en défaut pour le genre isotrope. Il faut donc rejeter cette approche.

Il est clair que nous serions plutôt satisfaits si nous avions un mécanisme qui associe naturellement, à tout espace difféologique X, un difféologie correcte sur l'ensemble de ses parties $\mathfrak{P}(X)$. Nous l'appliquerions en particulier à notre situation, et l'espace des mouvements inertiels de la relativité restreinte se trouverait automatiquement munis d'une structure lisse, sans qu'il soit question d'autre chose [44]. Nous allons évaluer maintenant deux propositions de difféologie sur $\mathfrak{P}(X)$.

Tentative 1. La première idée qui vient à l'esprit est inspirée de la difféologie quotient. Soit Q le quotient de X par une relation d'équivalence, et $\mathtt{classe}\ : X \to Q$ la projection de X sur son quotient. Une plaque de Q est une paramétrisation qui se relève localement, en tout point, par une plaque de X. C'est-à-dire, une paramétrisation $r \mapsto q_r$ de Q est une plaque de la difféologie quotient s'il existe pour tout r_0 dans son domaine, un petit voisinage ouvert V de r_0 et une plaque $r \mapsto x_r$ de X, définie sur V, telle que $q_r = \mathtt{classe}(x_r)$. Autrement dit, si l'on se souvient que l'espace quotient Q est, par définition, l'ensemble des classes d'équivalence :

$$Q = \big\{\{x' \in X \mid x' \sim x\} \mid x \in X\big\},$$

la paramétrisation $r \mapsto q_r$ est une plaque si l'on peut choisir localement en tout point, de façon lisse, un représentant $x_r \in q_r$. Puisque Q est naturellement une partie de l'ensemble des parties de X :

$$Q \subset \mathfrak{P}(X),$$

nous pourrions suggérer la difféologie suivante de $\mathfrak{P}(X)$, qui copie la difféologie quotient : une paramétrisation $r \mapsto p_r$ de l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ est une plaque si l'on peut choisir localement en tout point, de façon lisse, un élément $x_r \in p_r$. Mais cette difféologie est trop faible et ne nous conduit pas où l'on désire. Prenons la difféologie qu'elle induit sur l'espace des droites affine $\mathcal{L}_2$ du plan $\mathbf{R}^2$, la paramétrisation définie sur $\mathbf{R}$ qui associe à tout rationnel l'axe ox et à tout irrationnel l'axe oy est lisse puisqu'on peut choisir pour tout $t \in \mathbf{R}$ le point $(0,0)$ qui appartient à la fois aux deux axes, ce qui remplit la condition nécessaire. Or, il est clair qu'une telle paramétrisation n'est pas ce qu'on a envie de considérercomme une paramétrisation lisse [45] de $\mathcal{L}_2$. Il nous faut donc contrôler plus précisément ce que l'on attend au minimum d'une difféologie de $\mathfrak{P}(X)$.

Tentative 2. Le défaut de l'exemple des droites, dans la première construction, est que si l'on a une plaque Q du sous-espace p_r, pour une valeur du

44. Une alternative consisterait à définir une droite par deux points et prendre un quotient, ou par un point et un vecteur directeur, et prendre à nouveau un quotient. Mais ces méthodes *ad hoc* tomberaient en défaut immédiatement dans des cas plus compliqués de mouvements inertiels, et de toute façon n'auraient aucune valeur universelle.

45. Notons que si cette difféologie est satisfaisante en ce qui concerne les quotients, c'est justement parce que les classes d'équivalences forment une partition de l'espace, et que le phénomène en question n'a pas lieu.

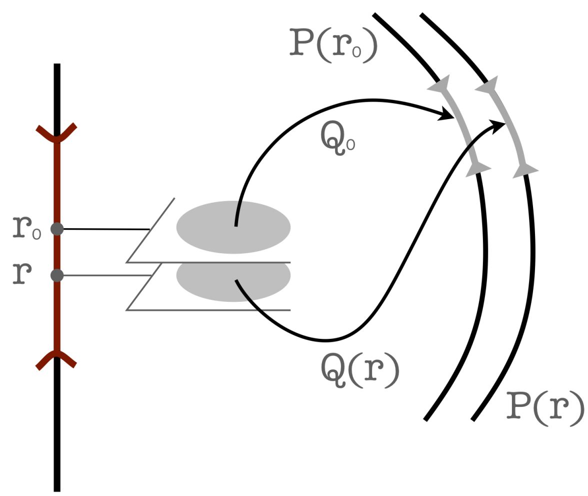
paramètre r, on ne peut pas la « suivre » différentiablement quand le paramètre r varie différentiablement. En effet la droite « saute » d'un axe à l'autre à chaque passage par un nombre rationnel. C'est donc ce défaut qu'il faut corriger. Nous proposons donc la difféologie suivante, que nous appellerons la difféologie *powerset*.

Définition Soit X un espace difféologique et $\mathcal{D}$ sa difféologie. Une paramétrisation $P : U \to \mathfrak{P}(X)$ est une plaque pour la difféologie *powerset* si elle satisfait la condition suivante :

♣ Pour tout $r_0 \in U$, pour tout $Q_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\mathrm{Val}(Q_0) \subset P(r_0)$ il existe un voisinage ouvert V de r_0 et il existe une plaque $Q : V \to \mathcal{D}$, pour la difféologie standard de $\mathcal{D}$, tel que :

$$Q_0 = Q(r_0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Val}(Q(r)) \subset P(r), \text{ pour tout } r \in V.$$

Autrement dit, Q est une plaque de la difféologie $\mathcal{D}$ telle que $Q(r)$ est une plaque du sous-espace $P(r) \subset X$, pour tout r dans V. La difféologie standard d'une difféologie est définie dans [PIZ-05-11, § 1.63]. La figure suivante (Difféologie *powerset*) essaye de représenter cette propriété.



Difféologie *powerset*

Revenons maintenant sur la question des mouvements inertiels $\mathcal{M}_E$ de la relativité restreinte. Ce sont les droites affines ordinaires de l'espace de Minkowski M. Nous avons alors le théorème suivant qui donne la structure induite sur $\mathcal{M}_E \subset \mathfrak{P}(M)$ par la difféologie powerset. De façon générale :

Theorème La difféologie induite sur l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des droites affines de $\mathbf{R}^n$, par la difféologie powerset de $\mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$, est une difféologie de variété de dimension $2(n-1)$: elle est engendrée par une famille de difféomorphismes locaux avec $\mathbf{R}^{2(n-1)}$. Plus précisément, $\mathcal{L}_n$, munie de cette difféologie, est difféomorphe au quotient du tangent TS^{n-1} de la sphère S^{n-1} par le groupe

$\{\pm 1\}$, agisant par $\pm 1(u,x) = (\pm u, x)$, où $u \in S^{n-1}$ et $x \in \mathbf{R}^n$, avec $u \cdot x = 0$, où le point $\cdot$ désigne le produit scalaire ordinaire.

DÉMONSTRATION — Considérons l'application $j : TS^{n-1} \to \mathcal{L}_n$ définie par

$$j(u,x) = x + \mathbf{R}u = \{x + tu \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Notons d'abord que j est surjective et que pour tout $\Delta \in \mathcal{L}_n$, l'équation $j(u,x) = \Delta$, avec $(u,x) \in TS^{n-1}$, a exactement 2 solutions :

$$u = \pm\frac{r - r'}{\|r - r'\|} \quad \text{et} \quad x = [\mathbf{1}_n - u\bar{u}]r,$$

où r et r' sont 2 points quelconques différents de Δ, et $[\mathbf{1}_n - u\bar{u}]$ est le projecteur orthogonal parallèle[46] à u.

Montrons maintenant que l'application j est lisse. Soit $P : s \mapsto (u(s), x(s))$ une plaque de TS^{n-1}, définie sur un certain domaine U. C'est-à-dire, P est une paramétrisation lisse de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui prend ses valeurs dans TS^{n-1}. Soit $P' = j \circ P : s \mapsto x(s) + \mathbf{R}u(s)$, nous voulons montrer que P' est une plaque de $\mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$. Soit alors $s_0 \in U$, $u_0 = u(s_0)$, $x_0 = x(s_0)$, $\Delta_0 = P'(s_0) = j(u_0, x_0)$; et soit $Q_0 : W \to \Delta_0$ une plaque de Δ_0. Puisque Q_0 est une plaque de Δ_0, pour tout $w \in W$, $Q_0(w) - x_0$ est proportionnel à u_0, c'est-à-dire $Q_0(w) - x_0 = \tau u_0$, et donc $\tau = u_0 \cdot (Q_0(w) - x_0) = u_0 \cdot Q_0(w)$ (puisque $u_0 \cdot x_0 = 0$). Donc, en définissant $\tau(w) = u_0 \cdot Q_0(w)$, on a : $Q_0(w) = x_0 + \tau(w)u_0$, où $\tau \in C^\infty(W, \mathbf{R})$. Introduisons alors

$$Q = [s \mapsto [w \mapsto x(s) + \tau(w)u(s)]], \text{ où } s \in U \text{ et } w \in W.$$

Puisque x, u et τ sont lisses, Q est une plaque de la difféologie de $\mathbf{R}^n$ et vérifie $Q(s_0) = Q_0$. Ainsi, P' est une plaque de $\mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$, donc j est lisse.

Montrons ensuite que j est une subduction sur son image, qui est l'espace $\mathcal{L}_n$. Soit $P : U \to \mathcal{L}_n$ une plaque et $s_0 \in U$. Puisque $P(s_0)$ est une droite de $\mathbf{R}^n$, il existe $(u_0, x_0) \in TS^{n-1}$ tel que $P(s_0) = x_0 + \mathbf{R}u_0$. Soit $Q_0 = [t \mapsto x_0 + tu_0]$, avec $t \in \mathbf{R}$; Q_0 est une plaque de $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathrm{Val}(Q_0) \subset P(s_0)$. Donc, puisque P est une plaque pour la difféologie powerset de $\mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$, il existe un voisinage ouvert V de s_0, et une plaque Q de la difféologie standard de $\mathbf{R}^n$ tel que $Q(s_0) = [t \mapsto x_0 + tu_0]$ et $\mathrm{Val}(Q(s)) \subset P(s)$. Choisissons alors $t = 0 \in \mathrm{dom}(Q(s_0))$, puisque Q est une plaque de la difféologie standard de $\mathbf{R}^n$, il existe un voisinage ouvert W de s_0 et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(t,s) \mapsto Q(s)(t)$, défini sur $W \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, est lisse. Définissons alors, pour tout $s \in W$:

$$v(s) = \left.\frac{\partial Q(s)(t)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Puisque Q est lisse, la paramétrisation v est lisse ; et nous avons $v(s_0) = u_0 \neq 0$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert W' de s_0 sur lequel v ne s'annule pas. Donc, l'application

$$u : s \mapsto \frac{v(s)}{\|v(s)\|}$$

46. Par définition : $\bar{u}(v) = u \cdot v$, et donc $[\mathbf{1} - u\bar{u}](v) = v - (u \cdot v)u$.

est lisse sur W'. De plus, par construction, $u(s)$ dirige la droite $P(s)$. Maintenant, Définissons

$$x(s) = Q(s)(0) - [u(s) \cdot Q(s)(0)]u(s).$$

Puisque $Q(s)(0) \in P(s)$ et $u(s)$ dirige $P(s)$, le point $x(s)$ appartient à $P(s)$, et par construction $u(s) \cdot x(s) = 0$. Donc, la paramétrisation de TS^{n-1} définie par $\phi : s \mapsto (u(s), x(s))$ est lisse et vérifie $j(u(s), x(s)) = P(s)$. Ainsi, ϕ est un relevé local de P le long de j, défini sur W'. Combiné avec la surjectivité et la différentiabilité de j, c'est le critère pour que j soit une subduction de TS^{n-1} sur son image $\mathcal{L}_n$ [PIZ-05-11, § 1.48]. Par conséquent, $\mathcal{L}_n$ est difféomorphe au quotient $TS^{n-1}/\{\pm 1\}$, où -1 renverse l'orientation : $\pm(u, x) = (\pm u, x)$. □

Cette construction et ce théorème appellent plusieurs remarques :

R1 — L'usage de la difféologie powerset nous a permis de contourner la difficulté due à l'absence d'un paramétrage cohérent global pour les géodésiques de l'espace de Minkowski. La structure induite par l'espace des parties $\mathfrak{P}(M)$ correspond exactement à ce que nous espérions, et ce qui est usuel de considérer, sans choix *ad hoc*, uniquement grâce à une construction universelle.

R2 — Dans le cas galiléen, cette construction s'applique aussi, donne le bon résultat, et évite de trivialiser *a priori* le continuum galiléen $\mathcal{C}$ en un produit du Temps par un espace.

R4 — Il est probable que le théorème ci-dessus se généralise, sans trop d'effort, à l'ensemble des géodésiques d'un espace de Hadamard [47].

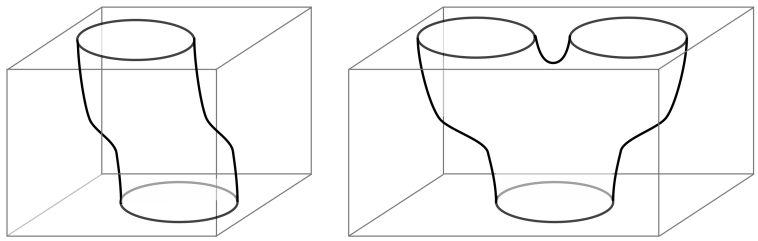
R5 — Tout espace de solutions d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles, hérite de cette façon d'une difféologie canonique sans qu'il soit besoin de détailler la nature de l'équation. Ensuite, une fois qu'un espace est munie d'une difféologie, il peut lui être appliqué toutes les constructions difféologiques ordinaires : formes différentielles, calcul de Cartan-De Rham, fibrés, homotopie, difféomorphismes etc..

Finalement, nous pourrions conclure, utilisant les mots introduits dans les premiers paragraphes, que

► *Le mouvement d'une chose est décrit par une partie d'un substrat. Les mouvements d'une même chose sont des partie d'un même substrat. Le substrat de la chose étant muni d'une structure lisse, l'ensemble de ses mouvements hérite naturellement d'une structure lisse.*

En quoi cette généralité peut elle être utile ? Imaginons, par exemple, que les surfaces dessinées ci-dessous (figure « Surfaces in $\mathbf{R}^3$ ») soient des solutions d'une même équation aux dérivées partielles. Si la surface de gauche peut être décrite par le flot d'un cercle, il est difficile d'imaginer un mécanisme d'évolution identique pour les deux surfaces. Et finalement, ce n'est peut-être pas nécessaire puisque un ensemble de surfaces peut toujours être muni de la difféologie powerset, induite de l'espace des parties de $\mathbf{R}^3$.

47. Voir à ce propos [Igl-92].



Surfaces in $\mathbf{R}^3$

Par cet exemple particulier, on voit qu'en considérant la structure lisse d'un espace de mouvement à travers la structure hérité de la difféologie powerset de l'ensemble des parties du substrat, on s'affranchit des limites d'un modèle local ou global du mouvement (comme par exemple être le graphe d'une application ayant le même espace de paramètres chronologiques). On peut imaginer des solutions d'équation différentielles sur des espaces non séparés, des mouvements dont la structure chronologique ne serait que partiellement ordonnée etc. etc..

R6 — La difféologie powerset d'un espace X peut se décrire plus conceptuellement de la façon suivante. Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ entre $\mathfrak{P}(\mathsf{X})$ et la difféologie $\mathcal{D}$ de X, définie par

$$\mathsf{A} \;\mathcal{R}\; \mathsf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{Val}(\mathsf{Q}) \subset \mathsf{A},$$

et son graphe

$$\mathsf{Graph}(\mathcal{R}) = \{(\mathsf{A}, \mathsf{Q}) \in \mathfrak{P}(\mathsf{X}) \times \mathcal{D} \mid \mathsf{Val}\,\mathsf{Q} \subset \mathsf{A}\}.$$

Pour toute paramétrisation $\mathsf{P} : \mathsf{U} \to \mathfrak{P}(\mathsf{X})$, nous considérons l'image réciproque de la première projection $\mathsf{pr}_1 : \mathsf{Graph}(\mathcal{R}) \to \mathfrak{P}(\mathsf{X})$ par P, que nous identifions ainsi :

$$\mathsf{P}^*(\mathsf{Graph}(\mathcal{R})) \simeq \{(\mathsf{r}, \mathsf{Q}) \in \mathsf{U} \times \mathcal{D} \mid \mathsf{Val}(\mathsf{Q}) \subset \mathsf{P}(\mathsf{r})\}.$$

Le diagramme suivant fixe quelques notations, en particulier π représente la seconde projection après cette identification, *i.e.* $\pi(\mathsf{r}, \mathsf{Q}) = (\mathsf{P}(\mathsf{r}), \mathsf{Q})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}^*(\mathsf{Graph}(\mathcal{R})) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathsf{pr}_1"'] & \mathsf{Graph}(\mathcal{R}) \arrow[d, "\mathsf{pr}_1"] \\
\mathsf{U} \arrow[r, "\mathsf{P}"'] & \mathfrak{P}(\mathsf{X})
\end{tikzcd}$$

La paramétrisation P est une plaque de la difféologie powerset si et seulement si la première projection $\mathsf{pr}_1 : \mathsf{P}^*(\mathsf{Graph}(\mathcal{R})) \to \mathsf{U}$ est, ce que nous avons appelé [48], une *subduction locale* en tout point [PIZ-05-11, § 2.17]. En effet, c'est équivalent à ce que cette projection admette une section locale au voisinage de tout point r_0, passant par tout point (r_0, Q_0), au dessus de r_0.

R7 — Il est facile de vérifier que, pour toute paire d'espaces difféologiques X et Y, l'injection $f \mapsto \mathsf{Graph}(f)$ de $C^\infty(X, Y)$ dans $\mathfrak{P}(X \times Y)$ est lisse. Nous n'avons toutefois pas démontré que cette injection est une induction, et c'est peut-être faux en général. Dans ce cas, la question d'une troisième tentative de difféologie correcte sur $\mathfrak{P}(X)$, qui satisferait cette condition, reste ouverte.

NOTE. La discussion de ce paragraphe souligne un type de difficulté rencontrée fréquemment par les étudiants, dans ce genre de questions : l'objet d'étude est mal identifié. Par exemple, qu'est ce qu'une solution d'une équation différentielle, comme celle du problème à deux corps, par exemple ? C'est, par définition, une application $[t \mapsto r]$ définie sur un ouvert de la droite réelle $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. C'est donc une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, si on considère qu'une fonction c'est son graphe. Autrement dit, les solutions du problème différentiel sont — par nature — une partie $\mathcal{S}$ de l'ensemble des parties de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, ce que l'on peut signifier par $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$. Comme il est psychologiquement difficile d'imaginer cet immense ensemble qu'est $\mathfrak{P}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$, et aussi parce que nos outils pour l'explorer sont souvent limités, nous préférons parler de $\mathcal{S}$ par représentations, en identifiant par exemple une partie de $\mathcal{S}$ avec un ensemble de paramètres ayant un sens immédiat. Ce faisant, nous nous éloignons de la nature de l'espace étudié et nous introduisons une imprécision, parfois une confusion, qui peut limiter les résultats de notre investigation, mais qui est surtout un handicap conceptuel [49]. C'est donc par défaut qu'on commet souvent un amalgame entre les espaces des phases, l'espace des phases étendu, l'espace des solutions ou toute autre représentation particulière (locale ou globale) de ce dernier. Comme l'a écrit Alfred Korzybski dans ses *Prolégomènes aux systèmes non-aristotéliciens et à la Sémantique générale* : « La carte n'est pas le territoire ». Autrement dit : la représentation n'est pas l'objet, et en mathématique — comme ailleurs — il faut se garder de confondre l'un et l'autre. Être équivalent ne signifie pas être identique et c'est bien pour cela que ces deux mots sont distincts.

Lectures suggérées

- ⋆ Platon, *Timée*, trad. Émile Chambry.
- ⋆ Aristote, *La Physique*, Éd. J. Vrin.

48. Cette terminologie n'est pas fameuse, j'aurais préféré appeler ce type de projection une *submersion*, mais cela m'aurait obligé à une comparaison avec la notion usuelle de submersion, ce que je n'ai pas fait.

49. Pour les systèmes différentiels ordinaires, l'usage a voulu qu'on passe par un intermédiaire : l'espace d'évolution. Dans cet espace, le système s'écrit comme un feuilletage sécable dont le quotient représente l'espace des solutions. Nous avons voulu montrer ici que l'on peut aussi échapper à cette inhibition par le biais de la difféologie, qui donne au passage une construction catégorique.

- ⋆ Maïmonide, *Le Guide des Égarés*, Éd. Maisonneuve & Larose.
- ⋆ Giordano Bruno, *Le Banquet des Cendres*, Éd. L'éclat.
- ⋆ Galileo Galilei, *Dialogue sur les Deux Grands Systèmes du Monde*, Éd. Points.
- ⋆ Albert Einstein, *La Relativité*, Éd. Payot.
- ⋆ Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique Analytique*, Éd. Blanchard.
- ⋆ Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, Éd. Gauthier-Villars.
- ⋆ Jean-Marie Souriau, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Éd. Dunod.

Références

[Ari-P] Aristote. *La Physique.* Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1999.

[Ari-C] Aristote. *Traité du Ciel.* Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1986.

[Boo-69] William M. Boothby. *Transitivity of the automorphisms of certain geometric structures.* Trans. Amer. Math. Soc., volume 137, pages 93—100, 1969.

[Bru-B] Giordano Bruno. *Le banquet des cendres.* Éditions de l'éclat, Paris, 2006.

[Car-22] Elie Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux.* Hermann Éditeurs, Paris, 1922.

[Ein-R] Albert Einstein. *La Relativité.* Payot, collection *Petite bibliothèque*, Paris, 1990.

[Gal-D] Galileo Galilei. *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Seuil, collection *Points*, Paris, 1992.

[Han-M] Georges Hansel. *Création et éternité du monde chez Maimonide.* Conférence au Centre Edmond Fleg, 1997.
Url `http://ghansel.free.fr`

[Igl-92] Patrick Iglesias. *Sur les géodésiques qui coupent un convexe, en courbure négative ou nulle.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, no 1, pages 39—42, série 6, volume 1, 1992.

[Igl-98] Patrick Iglesias. *Les origines du calcul symplectique chez Lagrange.* L'enseignement mathématique, volume 44, pages 257—277, 1998.

[PIZ-10] Patrick Iglesias-Zemmour. *The Moment Map in Diffeology.* In Memoirs of the American Mathematical Society, volume 207, no 972, 2010.

[PIZ-05-11] Patrick Iglesias-Zemmour. *Diffeology.* Electronic document.
Url `http://math.huji.ac.il/~piz/diffeology`

[IZK-11] Patrick Iglesias-Zemmour and Yael Karshon. *Smooth Lie group actions are parametrized diffeological subgroups.* Proceedings of the American Mathematical Society, volume 140, pages 731—739, 2011.

[IZZ-12] Patrick Iglesias-Zemmour and François Ziegler. *Primary spaces, Mackey's obstruction, and the generalized barycentric decomposition.* En préparation.

[Kle-74] Felix Klein. *Le programme d'Erlangen.* Gauthier-Villars, collection *Discours de la méthode*, Paris, 1974.

[Kos-10] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *The Nœther Theorems.* Éditions Springer, collection *Source and Studies in History of Mathematics and Physical Sciences*, New-York, 2011.

[Lag-MA] Joseph-Louis Lagrange. *Mécanique analytique.* Librairie Albert Blanchard, Paris, 1965. Fac-similé de la troisième édition.

[Lag-08] J.-L. Lagrange. *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites.* Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 713–768. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 22 août 1808 à l'Institut de France.

[Lag-09] Joseph-Louis Lagrange. *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique.* Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 771—805. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 13 mars 1809 à l'Institut de France.

[Lag-10] Joseph-Louis Lagrange. *Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique.* Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, pages 809—816. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Lu, le 19 février 1810 à l'Institut de France.

[Sou-69] Jean-Marie Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.

[Sou-83] Jean-Marie Souriau. *Géométrie globale du problème à deux corps.* Modern Developments in Analytical Mechanics, pages 369—418. Accademia della Scienza di Torino, 1983.

[Sou-86] Jean-Marie Souriau. *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811. Math. Sci. hum.*, volume 94, pages 45—54, 1986.

[Sou-05] Jean-Marie Souriau *Les groupes comme universaux.* Géométrie au XXe siècle : histoire et horizons, pages 302—316. Hermann, Paris, 2005.

[Zie-96] François Ziegler. *Théorie de Mackey symplectique.* In : Méthode des Orbites et Représentations Quantiques, pp. 69–96. Ph.D. Thesis, Université de Provence, 1996. Url http ://arxiv.org/abs/1011.5056.

E-mail address: `piz@math.huji.ac.il`

Laboratoire d'Analyse, Probabilité et Topologie, CNRS, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13